ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 22 SEPTEMBRE 1947.

PRÉSIDENCE DE M. GABRIEL BERTRAND.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur les satellites artificiels de la Terre.* Note ([1]) de M. **Jean Chazy**.

On a annoncé récemment que des balisticiens cherchaient à lancer un projectile qui deviendrait un satellite de la Terre. M. Esclangon a souligné ([2]) la difficulté du problème; je voudrais aussi présenter à ce sujet quelques remarques de Mécanique céleste.

Admettons que, lancé du sol et auto-propulsé dans la traversée des couches denses de l'atmosphère, le projectile P arrive à des couches très raréfiées, et que dans ces couches, à partir d'un instant initial, il ne soit plus soumis qu'à l'attraction de la Terre et à la résistance de l'air, et admettons que son mouvement soit sensiblement circulaire.

Si par approximation nous supposons la Terre constituée de couches sphériques homogènes, et par suite à son extérieur équivalente à un point matériel O, de coefficient attractif μ tel que $\mu/R^2 = g$, avec $R = 4.10^4$ km$/2\pi$, $g = 9{,}8$ m/s, la vitesse circulaire dans le vide est au sol $\sqrt{\mu/R} = \sqrt{gR}$, soit environ 8 km/s, et correspond à la durée de révolution $2\pi\sqrt{R^3/\mu} = 2\pi\sqrt{R/g}$, soit environ $1^h 24^m$. A 300^{km} au-dessus du sol, cette vitesse circulaire et cette durée sont environ 7,7 km/s et $1^h 30^m$; au quart du rayon R au-dessus du sol, elles sont environ 7 km/s et 2 heures. Dans tous les cas la vitesse parabolique dans le vide est égale au produit de la vitesse circulaire par $\sqrt{2}$, et la vitesse avec laquelle le projectile échapperait à l'attraction de la Terre, et qui dans l'atmosphère dépend de la direction, est supérieure à ce produit.

Si l'on pouvait admettre que l'atmosphère a disparu à la distance du mouvement considéré, comme à la distance de la Lune, le projectile P devien-

---

([1]) Séance du 15 septembre 1947.

([2]) *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 161.

drait un satellite permanent de la Terre. Si, malgré la résistance de l'air, le mouvement sensiblement circulaire du projectile P dure par exemple un jour, ou un mois, avant que ce projectile ne retombe dans les couches denses de l'atmosphère, il apparaîtra comme un satellite temporaire de la Terre. Étudions un tel mouvement.

Supposons d'abord que la résistance de l'air est une force opposée à la vitesse $\overline{v}$ du projectile P, soit $-\overline{\lambda v}$ par unité de masse, λ désignant une quantité positive : c'est l'hypothèse qui, avec une fonction λ particulière, a été appliquée par Backlund et par Tisserand au mouvement de la comète d'Encke, et par Poincaré à l'hypothèse cosmogonique de See, et qui a été étudiée aussi par Fatou. La trajectoire est plane, située dans un plan passant par le centre O, et concave vers O. Elle possède une propriété simple qui généralise la propriété, bien connue des artilleurs, selon laquelle l'angle de chute d'un obus est supérieur en valeur absolue à l'angle de tir, ou encore, entre le point de départ et le point de chute, le sommet de la trajectoire se projette au delà du milieu : de même ici, si la trajectoire du projectile P coupe une circonférence de centre O au point A, puis au point B, de part et d'autre d'un rayon vecteur maximum, l'angle des deux courbes en B est supérieur à leur angle en A, ou encore, dans l'angle $\widehat{AOB}$ le rayon vecteur maximum est au delà de la bissectrice. De part et d'autre d'un rayon vecteur minimum, le sens des inégalités est renversé.

En fonction des éléments osculateurs a, e, ϖ, τ, de l'anomalie vraie osculatrice θ, et de coordonnées cartésiennes x, y d'origine O dans le plan du mouvement, le théorème des forces vives donne l'équation

$$d\left(-\frac{\mu}{2a}\right) = -\lambda v^2\,dt, \quad \text{ou} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2\lambda a^2}{\mu}v^2 = -2\lambda a\frac{1+e^2+2e\cos\theta}{1-e^2};$$

et d'autre part, dans l'équation classique de la théorie des perturbations

$$\frac{d\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{dt} = X\frac{\partial x}{\partial\varpi} + Y\frac{\partial y}{\partial\varpi},$$

les composantes X, Y de la résistance de l'air sont égales à $-\lambda x'$, $-\lambda y'$, les dérivées $\partial x/\partial\varpi$, $\partial y/\partial\varpi$ à $-y$ et x, et le second membre à $-\lambda(xy'-yx')$, et à $-\lambda\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, si le mouvement est de sens positif : d'où l'équation très simple

$$\frac{d[a(1-e^2)]}{dt} = -2\lambda a(1-e^2).$$

Si encore on considère les distances périhélie et aphélie osculatrices $a(1-e)$ et $a(1+e)$, on forme par élimination de e les deux équations

$$\frac{d[a(1-e)]}{dt} = -2\lambda a\frac{1-e}{1+e}(1-\cos\theta), \qquad \frac{d[a(1+e)]}{dt} = -2\lambda a\frac{1+e}{1-e}(1+\cos\theta).$$

Il en résulte que le grand axe $2a$, le paramètre $a(1-e^2)$ décroissent dans le mouvement et l'hypothèse considérés, et aussi la distance périhélie, M. Esclangon l'a montré, et la distance aphélie. Si le coefficient λ est constant, c'est-à-dire si la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse, le paramètre est une fonction exponentielle du temps, dont l'exposant est $-2\lambda t$, et les variations séculaires du grand axe et des longueurs des rayons vecteurs *maxima* et *minima* sont sensiblement des fonctions exponentielles de même exposant.

Supposons maintenant que la trajectoire considérée du projectile P soit plane, située dans un plan passant par le centre O, xOy, et que dans ce plan la résistance de l'air X, Y fasse un angle quelconque avec la vitesse $\bar{v}$, supérieur toutefois à un angle fixe supérieur à $\pi/2$. Supposons d'autre part que cette résistance ait une intensité quelconque $R=\sqrt{X^2+Y^2}$, fonction continue toutefois, pour v et r différents de zéro, de la vitesse v, du rayon vecteur r et de leurs directions, ou encore que R soit la somme de telles fonctions continues : et en effet, dans le mouvement de la comète d'Encke, Backlund a été amené à considérer un milieu dont la résistance est discontinue. Les équations antérieures

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2}{\mu}(Xx'+Yy'),\qquad \frac{d\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{dt}=xY-yX$$

mettent en évidence des résultats simples.

J'ai démontré ([3]) dans ces hypothèses générales, et si le mouvement d'un point matériel P peut s'étendre jusqu'au centre O, que le point P tombe sur le point O, ou tend vers le point O quand le temps croît indéfiniment, ou s'éloigne indéfiniment. Il faut introduire toutefois ces deux restrictions que, pour un système de valeurs données de r et quelconques des autres variables, la fonction R est infiniment petite si v est infiniment petit, et au contraire est supérieure à une quantité positive fixe si v est supérieur à une quantité positive fixe : il suffit même que la dernière condition soit remplie sur une partie seulement de l'orbite du point P.

Il semble résulter de ce qui précède que le problème proposé présente deux difficultés techniques : 1° il faut que le projectile arrive dans les couches raréfiées de l'atmosphère avec une vitesse v au moins égale à la vitesse circulaire correspondante, soit $\sqrt{\mu/r}$ pour la couche de rayon r, et d'ailleurs inférieure à la vitesse d'échappement ; 2° il faut que la vitesse $\bar{v}$ soit sensiblement transversale, c'est-à-dire normale au rayon vecteur.

([3]) *Comptes rendus*, **174**, 1922, p. 1280 ; *Bulletin astronomique*, 3, 1923, pp. 239-248.

MICROBIOLOGIE. — *Sur l'extraction et la concentration du principe antidotique des filtrats de* B. subtilis, *de* Penicillium notatum, *d'*Actinomyces griseus, *etc.* Note (1) de MM. **Gaston Ramon** et **Rémy Richou.**

Au cours de ces derniers temps, nous avons mis en évidence dans certains filtrats de culture de *B. subtilis*, de *Penicillium notatum*, d'*Actinomyces griseus*, un *principe antidotique* qui, comme l'indique le nom que nous lui avons donné, est capable de s'opposer aux exotoxines microbiennes telles que la toxine staphylococcique, la toxine diphtérique, etc. et de les détruire *in vitro* (2). D'après nos constatations initiales, ce principe serait de nature enzymatique. Il se différencie nettement des principes antibiotiques que peuvent renfermer les mêmes filtrats et qui s'identifient respectivement avec la subtiline, la pénicilline, la streptomycine, lesquelles n'ont aucune action sur les toxines.

Pour des fins en premier lieu expérimentales, nous avons cherché à extraire des filtrats, tout en le concentrant, le principe antidotique qu'ils contiennent.

Après maints essais et l'emploi de divers procédés qui ne nous donnaient guère satisfaction, nous avons eu finalement recours à une technique dérivée de la méthode de précipitation par le sulfate de soude, jadis mise au point par l'un de nous et, depuis, largement utilisée pour la purification et la concentration des sérums antitoxiques.

Technique. — Du sulfate de soude pur, neutre et anhydre, est ajouté au filtrat (sur bougie de porcelaine) de la culture du germe antagoniste (*B. subtilis* par exemple), filtrat préalablement porté à 37°, à raison de 32^{g} pour 100^{cm^3} de filtrat. Le mélange est maintenu à la température de 37°, soit au bain-marie, soit à l'étuve. Il est agité à de nombreuses reprises pour assurer la dissolution parfaite du sulfate de soude. Trois heures plus tard, alors qu'un précipité s'est formé, ce mélange est filtré sur papier. Le filtre, recouvert du précipité, est plongé dans 20, 10 ou 5^{cm^3} d'eau distillée stérile, suivant que l'on désire concentrer 5, 10 ou 20 fois. Après un séjour de 3 heures à l'étuve à 37°, de 3 heures au laboratoire à 18° et de 10 heures à la chambre froide (+ 4°), l'eau qui s'est chargée du précipité primitivement en dépôt sur le filtre est centrifugée et le liquide de centrifugation est recueilli; le culot de centrifugation constitué par la plus grande partie du précipité est abandonné (3).

Le pouvoir antidotique est recherché et titré : 1° dans le filtrat originel avant les essais d'extraction et de concentration; 2° dans le liquide de filtration sur papier, préalablement débarrassé de la plus grande partie du sulfate de soude qu'il contenait en faisant cristalliser ce dernier par refroidissement et amorçage

(1) Séance du 15 septembre 1947.

(2) *Comptes rendus*, **220**, 1945, pp. 543 et 801; **221**, 1945, pp. 213 et 271; *Revue d'Immunologie*, **9**, 1944-1945, pp. 161-217; *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 621 et 772; *Revue d'Immunologie*, **10**, 1946, p. 932; *Comptes rendus*, **224**, 1947, pp. 82-84; *Revue d'Immunologie*, **11**, 1947, p. 5-21.

(3) Jusqu'à ce jour, nos tentatives pour redissoudre le précipité afin d'étudier son contenu et son activité biologique sont restées infructueuses.

de la cristallisation au moyen de quelques cristaux du même sel; 3° dans le liquide de centrifugation qui représente en quelque sorte et jusqu'à plus ample informé un éluat du principe antidotique.

Le titrage est effectué selon le procédé que nous avons établi ([4]) et qui consiste, rappelons-le brièvement, à rechercher quel est le plus petit volume de filtrat ou de liquide dont on désire connaître le titre antidotique qui amène à l'étuve, en 6 heures à 37°, la destruction totale d'une quantité de toxine staphylococcique correspondant à 100 doses hémolytiques, les globules rouges de Lapin fraîchement recueillis servant d'indicateur de cette destruction.

Nos essais d'extraction et de concentration du principe antidotique ont porté principalement sur les filtrats de culture de différentes souches du *B. subtilis* obtenus à partir du milieu classique de Sauton (S), ou d'un milieu (SS) dérivé du milieu Sauton et dans lequel l'asparagine est remplacée par de l'hydrolysat de viande et de gélatine (2^g par litre) ([5]), ou encore sur le milieu de Waksman (W) utilisé pour l'obtention de la streptomycine. D'autres essais ont été effectués avec des filtrats d'*Actinomyces griseus* et de *Penicillium notatum*.

Dans le tableau ci-dessous sont enregistrés, avec quelques indications expérimentales, les résultats obtenus dans un certain nombre d'essais opérés sur les filtrats de culture de *B. subtilis*.

				Titre en unités antidotiques du		
Nos du filtrat.	Milieu.	Souche.	Concentration.	Filtrat originel.	Liquide de filtration.	Liquide de centrifug. (éluat).
85......	SS	T. S.	10 fois	50	5	300
86......	»	»	10 »	40	15	300
95......	S	»	10 »	70	0	450
98......	W	»	5 »	80	3	300
107......	SS	»	20 »	50	5	600
118......	»	»	20 »	50	5	800
119......	W	»	10 »	30	0	250
120......	»	»	20 »	30	0	500
125......	SS	»	20 »	30	2	250
126......	»	By.	20 »	500	15	7000
127......	»	Av.	10 »	350	15	1500

De l'ensemble de ces résultats et d'autres analogues, acquis en partant des filtrats de culture de *Penicillium notatum* et d'*Actinomyces griseus*, il ressort que le principe antidotique que renferment ces filtrats, comme ceux du *B. subtilis*, peut être entraîné dans le précipité provoqué par l'addition aux filtrats de sulfate de soude, et qu'il peut être élué en traitant ce précipité par un volume plus ou moins réduit d'eau distillée, d'où une concentration relativement forte

([4]) G. Ramon et R. Richou, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 509; *Revue d'Immunologie*, **11**, 1947, p. 106).

([5]) R. Richou, *Revue d'Immunologie*, **11**, 1947, p. 58.

en unités antidotiques du produit final recueilli ([6]). Cette concentration est susceptible d'être rendue plus grande encore, par évaporation du liquide d'élution qui contient, outre une petite proportion de sulfate de soude, le principe antidotique, lequel représente, pondéralement, une masse peu importante. Le rendement lui-même pourra sans doute être amélioré, car jusqu'ici nous n'avons pu traiter, faute de matériel et n'ayant à notre disposition qu'une installation de fortune, que de très petites quantités de filtrat et dans des conditions malaisées ([7]).

Ainsi, en conclusion, il est donc possible, grâce à un procédé très simple, d'extraire et de concentrer le principe antidotique contenu dans les filtrats de culture de certains germes antagonistes, ce qui permettra sans doute de pénétrer plus avant dans la connaissance de la nature exacte de ce principe, et ce qui facilitera l'expérimentation en vue d'applications éventuelles.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Identification, par voie microcristalline, de très faibles quantités de glucinium à l'état métallique.* Note de M. **Georges Denigès.**

Les réactions d'ordre microchimique, indiquées pour le glucinium, nécessitent, toutes, la salification préalable de ce métal qu'on fait suivre de l'action du réactif approprié : ce sont, par suite, des réactions d'ions. Telles sont celle de Behrens ([1]) (formation d'un oxalate double de glucinum et de potassium), la meilleure de toutes, et celle de Streng ([2]) (production d'acétate

---

([6]) Un essai préliminaire nous a montré qu'une quantité de toxine diphtérique représentant 100 doses mortelles pour le Cobaye est détruite en une heure à peine à la température de l'étuve (37°), et même à la température ordinaire (20°), lorsque l'on mélange cette quantité avec 1^{cm^3} d'éluat titrant 7000 ou 1500 unités. Les cobayes auxquels ces mélanges sont injectés ne présentent en effet aucun signe d'intoxication diphtérique, alors que les cobayes témoins qui reçoivent la même dose de toxine meurent en moins de 18 heures.

Pour comparaison, voir G. Ramon, R. Richou et P. Ramon, *Revue d'Immunologie*, 9, 1944-1945, p. 191.

([7]) L'activité de l'extrait antidotique pourra être également accrue par l'usage de souches sélectionnées des microbes antagonistes et par l'emploi de milieux de culture appropriés. Ainsi, l'on remarquera dans le tableau ci-dessus que les souches Bγ et Aν, cultivées en milieu SS, ont donné des filtrats bruts d'un taux antidotique beaucoup plus élevé que la souche T.S. C'est le même problème qui s'est jadis posé pour la production des toxines en partant des anatoxines, et que nous avons résolu, pour notre part, en modifiant, en améliorant les milieux de culture de telle façon que la toxine diphtérique a été amenée en peu d'années de 8 unités antigènes (floculation) à 45 et 50 unités et davantage, et celle de la toxine tétanique de quelques unités à 30 et 40 unités en moyenne. (Voir à ce propos G. Ramon, *Revue d'Immunologie*, 5, 1939, p. 385.)

([1]) Behrens et Bourgeois, *Analyse qualitative microchimique* (*Encyclopédie Freny*, 4, 1893, p. 29).

([2]) *Ber. für Natur und Heilkunde*, 22 et 26.

triple de glucinium, d'uranyle et de sodium). Elles peuvent donc s'appliquer, directement, à l'identification du métal libre.

En étudiant l'action, à froid, de l'acide sulfurique au tiers (1 volume de SO_4H_2 concentré et 2 volumes d'eau) sur de menues parcelles de métaux de la série du magnésium et de l'aluminium, j'ai constaté que ce réactif, mis en présence des plus faibles quantités de glucinium métallique, fournissait très rapidement, sans évaporation ultérieure du liquide et même lorsqu'il reste encore du métal inaltéré, de magnifiques microcristaux de sulfate de glucinium tétrahydraté ($SO_4Gl, 4H_2O$) du type tétragonal holoédrique ([3]).

Pour les obtenir, rien de plus simple : sur une lame de verre porte-objet, on place 1 à 2^{mg}, au plus, du métal à essayer qu'on baigne dans une goutte de SO_4H_2 au tiers, apportée à l'aide d'une baguette de verre et ne devant pas s'étaler sur une zone circulaire supérieure à 6 ou 7^{mm} de diamètre. L'attaque de l'acide commence aussitôt, mais n'est bien apparente qu'après 15 à 20 secondes; en moins d'une minute, elle devient tumutueuse.

Si, sans couvrir la préparation d'une lamelle, on l'examine alors au microscope, à un grossissement de 100 à 150 diamètres, on observe, autour du métal, un vif dégagement de bulles d'hydrogène bouleversant le liquide ambiant et accompagné au bout de quelques minutes, malgré ce brassage généralement défavorable à la formation de gros cristaux, de beaux et volumineux octaèdres, dérivés du prisme droit à base carrée, dont quelques-uns (à 130 D) ont des arêtes apparentes allant de quelques millimètres à plus d'un centimètre, avec toutes les formes de groupements qu'on peut trouver dans ce système cristallin.

Aucun autre métal, traité dans les mêmes conditions, ne m'a donné ce résultat qui est donc bien spécifique du glucinium ([4]).

Bien qu'il s'agisse encore ici d'une réaction d'ions, celle-ci a cet avantage, sur toutes les autres, de se produire directement, à froid et sans interruption entre ses deux étapes, l'acide sulfurique employé étant, à la fois, agent d'ionisation d'abord et, aussitôt après, agent de précipitation.

Si l'on veut la réaliser avec une quantité moindre de métal, telle qu'une fraction de milligramme, on réduira la goutte d'acide au point de n'occuper qu'une surface plus réduite du verre support. Lorsque, au contraire, Gl est en notable excès (1^{cg} par exemple) les cristaux, en augmentant en nombre, se groupent autour du résidu métallique et en bloquent en quelque sorte l'accès à

([3]) Fricke et Havestadt, *Zeit. anorg. Chem.*, **170**, 1928, p. 38.

([4]) En effet, si le magnésium, aussi, attaque vivement, à froid, l'acide sulfurique dilué au tiers, en fournissant des cristaux, ceux-ci ne ressemblent en rien, ni par leur forme cristallographique, ni par leur aspect, à ceux que donne le glucinium dans les mêmes conditions.

De plus, ce dernier métal ne réagit qu'avec une extrême lenteur, à froid, sur l'acide acétique étendu à moitié que décompose au contraire, énergiquement, Mg, sans chauffer.

l'acide ambiant. On peut alors, pour un examen plus détaillé de l'ensemble, diluer le tout dans une goutte d'acide sulfurique concentré.

Enfin, si l'on veut contrôler cette réaction, d'ailleurs suffisante en soi, par celle de Behrens, adaptée, on pourra procéder comme suit, mais cette fois en deux étapes bien séparées. Une parcelle (1 à 2^{mg}) de métal est baignée dans une goutte d'acide acétique à 1/2, en volume. On l'évapore à une douce chaleur et l'on renouvelle trois ou quatre fois cette opération, puis on couvre le résidu avec une gouttelette d'une solution à 10 % d'oxalate de potassium. Il se forme, bientôt, de gros cristaux clinorhombiques de l'oxalate double caractéristique.

Le glucinium étant lentement dissous par l'acide acétique, il en reste toujours une partie résiduelle même après quatre attaques successives. De plus, lorsque avant l'addition d'oxalate de potassium, et si la dessiccation a été suffisamment lente, on examine le résidu au microscope, on peut observer des amas cristallins, en aiguilles groupées, formées d'acétate de glucinium dont l'aspect est un caractère de plus se rattachant à ce métal.

M. Auguste Chevalier fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage dont il a écrit la préface, intitulé : *Les insectes des Palmiers*, par M. Pierre Lepesme, avec le concours de M. J. Ghesquière et la collaboration de MM. J. Bourgogne, C. Cairaschi, R. Paulian et A. Villiers.

DÉSIGNATIONS.

M. Albert Caquot est désigné à nouveau pour faire partie du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique pendant les trois prochaines années scolaires.

CORRESPONDANCE.

M. l'Ambassadeur de France a Rome informe l'Académie, de l'institution à Pise, d'une *Domus Galileana* où sont réunis tous documents concernant Galilée et son École.

M. le Ministre de l'Éducation nationale invite l'Académie à lui présenter une liste de candidats à la *Chaire de Sélection et Orientation professionnelles* nouvellement créée au Conservatoire national des arts et métiers.

(Renvoi à la Section de Médecine et Chirurgie.)

M. le Secrétaire perpétuel signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

The Royal Society. *Newton Tercentenary Celebrations* 15-19 *July* 1946.

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur l'homologie des espaces homogènes.* Note (¹) de M. **Jean-Louis Koszul**, transmise par M. Élie Cartan.

Soit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}^n$ l'algèbre de Grassmann des formes différentielles invariantes à gauche d'un groupe de Lie compact connexe G (²). Le choix d'une métrique biinvariante de G définit un produit scalaire dans $\mathfrak{A}$ et un isomorphisme de l'algèbre de Lie de G sur le sous-espace $\mathfrak{A}^1$ des formes de degré un. Soit h la forme de $\mathfrak{A}^3$ telle que $h^{\bigcirc} = \mathrm{D}$; la structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}^1$ est définie par l'opération $[\alpha, \beta] = \alpha^\star \beta^\star . h$ ($\alpha, \beta \subset \mathfrak{A}^1$); ceci permet d'associer à tout sous-groupe de G un sous-espace de $\mathfrak{A}^1$.

1. Soit $\mathfrak{A}^{1,0}$ un sous-espace quelconque de $\mathfrak{A}^1$; on désigne par $\mathfrak{A}^{0,1}$ le sous-espace des éléments de $\mathfrak{A}^1$ orthogonaux à $\mathfrak{A}^{1,0}$ et par $\mathfrak{A}^{p,q}$ le sous-espace de $\mathfrak{A}$ engendré par les $\lambda x_1 x_2 \ldots x_p y_1 y_2 \ldots y_q$ où $\lambda \in \mathfrak{A}^0$, $x_i \in \mathfrak{A}^{1,0}$ et $y_j \in \mathfrak{A}^{0,1}$. Le projecteur de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}^{p,q}$ étant désigné par $\mathrm{A}^{p,q}$, on pose

$$\mathrm{T} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathrm{A}^{p,q}, \qquad \mathrm{L}^q = \sum_{p} \mathrm{A}^{p,q}, \qquad \mathfrak{B}^q = \sum_{p} \sum_{s \geqq q} \mathfrak{A}^{p,s}.$$

La forme h se décompose en $h = h_0 + h_1 + h_2 + h_3$, où $h_s = \mathrm{A}^{3-s,s}.h$. Pour que $\mathfrak{A}^{1,0}$ soit une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}^1$, il faut et il suffit que $h_1 = 0$ ou encore que $\mathrm{D}.w = 0$, w étant la forme de degré maximum (définie à un facteur réel près) engendrée par $\mathfrak{A}^{0,1}$. Cela est encore équivalent à la stabilité, vis-à-vis de l'opérateur D, des idéaux $\mathfrak{B}^q$ qui définissent alors dans $\mathfrak{A}$, avec les opérateurs D et T, une structure d'anneau à dérivation supérieure (³). Si $\mathfrak{A}^{1,0}$ est la sous-algèbre définie par un sous-groupe fermé connexe $\mathrm{U} \subset \mathrm{G}$ et si W est l'espace homogène G/U (⁴), on démontre que *le calcul de la suite d'homologies* ($\mathcal{E}_r$) *de* $\mathfrak{A}$ *donne l'anneau d'homologie à coefficients réels de l'application canonique p de* G *sur* W *ainsi que sa structure* (⁵).

Posons, avec les notations d'une Note précédente (³),

$$\mathcal{E}_r^{p,q} = \eta_r^q.(\mathcal{C}_r^q \cap \mathfrak{A}^{p+q}), \qquad \mathcal{E}^{p,q} = \eta^q.(\mathcal{C}^q \cap \mathfrak{A}^{p+q});$$

(¹) Séance du 8 septembre 1947.

(²) *Comptes rendus*, **224**, 1947, pp. 251-253; nous utilisons les notations et des résultats de cette Note; néanmoins, le produit extérieur de deux formes sera ici noté *ab* et non $a \wedge b$.

(³) *Comptes rendus*, **225**, 1947, pp. 217-219.

(⁴) L'espace homogène W est défini par les classes d'équivalence $\xi\mathrm{U}$ ($\xi \in \mathrm{G}$); par forme différentielle biinvariante de W, nous entendons une forme invariante par le groupe des opérateurs à gauche G et par le groupe des opérateurs à droite constitué par la composante connexe de l'unité dans le normalisateur de U.

(⁵) J. Leray, *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 1366-1368, 1419-1422. D'une manière précise, $\mathcal{E}_2$ est isomorphe à « l'anneau d'homologie de p », et $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est isomorphe, pour $r \geqq 2$, au quotient qui s'écrit, avec les notations de M. Leray, $\mathcal{P}_{r-1}^{p,q}/\mathcal{Q}_{r-1}^{p,q}$.

$\sum_q \mathcal{E}_1^{0,q} \subset \mathcal{E}_1$ et $\sum_q \mathcal{E}_2^{0,q} \subset \mathcal{E}_2$ sont alors respectivement isomorphes à l'algèbre des formes invariantes à gauche de W et à son anneau d'homologie H(W) ([6]); $\sum_q \mathcal{E}^{0,q} \subset \mathcal{E}$ est isomorphe à l'image de la représentation $\bar{\pi}$ de H(W) dans l'anneau d'homologie H(G) de G que définit p. Pour que U soit homologue à o ([7]), il faut et il suffit que w soit homologue à o.

Dans ce cadre, l'étude du cas où U est de dimension 1 ([4]) peut se faire complètement et conduit au résultat suivant, lorsque U est homologue à o : *les polynomes de Poincaré* G(t) *et* W(t) *de* G *et* W *sont liés par la relation*

$$G(t)(1+t^2) = W(t)(1+t^3).$$

La démonstration part du fait que tout $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}$ est dans $\mathcal{C}_2^0$ et que, comme $D.h = 0$ et $h_0 = 0$, on a $(D.\alpha)^2 = D.[\alpha(D.\alpha)] = 3\|\alpha\|^2 D.h_2 = -3\|\alpha\|^2 D.h_3 \in \mathcal{D}_1^4$. L'image de H(W) par $\bar{\pi}$ ne contient pas la classe d'homologie de h.

2. La décomposition de h en $h = h_0 + h_2 + h_3$ permet de caractériser les principaux types de sous-algèbres $\mathcal{A}^{1,0}$:

1° $h_2 = 0$ caractérise les sous-algèbres invariantes. Ceci résulte de ce que, si $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}$ et $\beta \in \mathcal{A}^1$, $[\alpha, \beta] = \alpha^* \beta^*.h = \alpha^*\beta^* h_0 + \alpha^*\beta^*.h_2 \equiv \alpha^*\beta^*.h_2 (\text{mod.}\, \mathcal{A}^{1,0})$. Dans ce cas $\mathcal{A}^{0,1}$ est aussi une sous-algèbre invariante.

2° $h_0 = 0$ caractérise les sous-algèbres abéliennes. Ceci résulte de ce que, si $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^{1,0}$, $[\alpha, \beta] = \alpha^*\beta^*.h = \alpha^*\beta^*.h_0$.

Supposons que $\mathcal{A}^{1,0}$ soit la sous-algèbre définie par un sous-groupe fermé de dimension 3; si $h_0 \neq 0$, $h_0 w \neq 0$ est une forme de degré maximum de G; il s'ensuit que w n'est pas homologue à o. Ainsi, *un sous-groupe non abélien de dimension* 3 *n'est pas homologue à* o ([8]).

3° $h_3 = 0$ caractérise les sous-algèbres d'éléments invariants par un automorphisme involutif et unitaire de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}^1$. Considérons en effet l'automorphisme $\Omega = \sum_q (-1)^q L^q$ de $\mathcal{A}$; on a $\Omega = \Omega^* = \Omega^{-1}$, $\Omega A^{1,0} = A^{1,0}$ et $\Omega A^{0,1} = -A^{0,1}$. Pour que $D\Omega = \Omega D$, il faut et il suffit que $h_3 = 0$; or la commutation de D et Ω est une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de Ω à $\mathcal{A}^1$ soit un automorphisme de cette algèbre de Lie. Si $\mathcal{A}^{1,0}$ est la sous-algèbre définie par un sous-groupe fermé U, W = G/U est alors, par définition, un espace riemannien symétrique.

On vérifie par ailleurs que h_3 est toujours l'image d'une forme différentielle

---

([6]) Par anneau d'homologie d'un espace compact, nous entendons ce que l'on désigne habituellement par son anneau de cohomologie à coefficients réels.

([7]) H. Samelson, *Ann. of Math.*, **42**, 1941, pp. 1091-1137.

([8]) M. E. Stiefel m'a signalé qu'il obtenait ce résultat en utilisant le polyèdre de E. Cartan associé à un groupe.

biinvariante ([4]) de W par la représentation que définit p. Ainsi, *un espace homogène ne possédant pas de forme différentielle biinvariante de degré 3 est un espace riemannien symétrique*.

On démontre enfin que, si $h_3 = 0$, $\delta_r = 0$ pour r impair; il y a donc isomorphisme des termes consécutifs $\mathcal{E}_{2p-1}$ et $\mathcal{E}_{2p}$ de la suite d'homologies $(\mathcal{E}_r)$ pour tout entier p.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur les intégrales de M. Jean-Louis Destouches considérées dans sa théorie des prévisions* ([1]). Note ([2]) de M. **Otton-Martin Nikodym**.

1. Le but de la présente Note est de fonder d'une manière précise les propriétés fondamentales d'une notion d'intégration introduite par M. J.-L. Destouches. Nous nous placerons à un point de vue un peu plus abstrait d'une tribu dénombrablement additive de Boole, ceci ne causant aucune complication.

Soit (B) un espace vectoriel, normé et complet de Fr. Riesz-Banach dont les éléments (vecteurs) seront désignés par x, y, z pourvus d'indices. $\|x\|$ désignera la norme de x. M. W. Orlicz a démontré que pour qu'une série Σx_i soit convergente, quelle que soit la permutation de ses termes (c. p.), il faut et il suffit que toute série partielle $\Sigma x_{\nu(i)}$, $\nu(1) < \nu(2) < \ldots$ converge. Chacune des deux parties de ce théorème se démontre par négatif, en utilisant la condition de Cauchy. Par la même méthode et, en s'appuyant sur le théorème de Orlicz, on démontre que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que, si $N < i(1) < i(2) < \ldots < i(s)$, on a $\|\Sigma_1^s x_{i(\alpha)}\| \leqq \varepsilon$ pour tout $s \geqq 1$. Ceci se généralise immédiatement pour s infini. Ce lemme fondamental ainsi que le théorème de Orlicz servent d'instrument pour démontrer les théorèmes suivants. Si Σx_i converge (c. p.) et qu'on change l'ordre des termes, la somme demeure la même; si $\nu(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$ est une matrice dont les éléments sont les différents nombres $1, 2, \ldots$, on a $\Sigma x_i = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta x_{\nu(\alpha, \beta)}$.

2. Soit (T) une tribu abstraite, dénombrablement additive de Boole. Si $a \in (T)$, $a \neq 0$, on appelle *décomposition dénombrable* (d. d.) de a tout ensemble D non vide et au plus dénombrable $a_1, a_2, \ldots$ d'éléments de (T) tels que $a_i a_k = 0$ pour $i \neq k$ et $\Sigma_i a_i = a$. Une d. d. D' de a s'appelle *extension* (e. d.) d'une d. d. D de a lorsque pour tout $a'_i \in D'$ il existe un $a_j \in D$ tel que $a'_i \subseteq a_j$. Si D' est $a'_1, a'_2, \ldots$ et D'' est $a''_1, a''_2, \ldots$, $D' \times D''$ désignera la d. d. $a'_i a'_j$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $(j = 1, 2, \ldots)$. Soit $\chi(a)$ une fonction définie sur (T), les valeurs $\chi(a)$ étant des vecteurs de (B). *Supposons que la somme $\Sigma_i \chi(b_i)$ converge toujours quelle que soit la suite infinie $b_i \in (T)$ d'éléments disjoints*. Dans ce cas nous nous trouvons

([1]) *Corpuscules et systèmes de corpuscules*, **1**, Paris, 1941, p. 246.

([2]) Séance du 4 août 1947.

dans les conditions du numéro 1. Soit $a_0 \in (T)$, $a_0 \neq 0$; on appelle $\chi(a)$ *intégrable sur a_0 suivant M. Destouches*, lorsqu'il existe un $y \in (B)$ tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une d. d. D de a_0 telle que pour toute e. d. D' de D on a $\| y - \Sigma_{a \in D'} \chi(a) \| \leqq \varepsilon$. On démontre que dans ce cas il n'existe qu'un seul y; il s'appelle *intégrale de $\chi(a)$ sur a'* : $\int_{a'} d\chi(a)$. Expl. Soit (T) la tribu des sous-ensembles boréliens de $(0, 1)$ et posons $\chi[(1/2 - \sigma, 1/2 + \sigma)] = 1$ pour tout $\sigma > 0$ et $< 1/2$ et, $\chi(a) = 0$ pour les autres $a \in (T)$. On trouve $\int_1 d\chi(a) = 0$, ce qui prouve que les intégrales considérées diffèrent de celles de l'auteur (³).

Théorème. — *Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une d. d. $D(\varepsilon)$ de la totalité 1, telle que, quelles que soient ses e. d. D', D'' on ait $\| \Sigma_{a \in D'} \chi(a) - \Sigma_{a \in D''} \chi(a) \| \leqq \varepsilon$, alors $\chi(a)$ est intégrable sur 1.*

Démonstration. — Soient $\varepsilon(1) > \varepsilon(2) > \ldots > 0$ tels que $\Sigma \varepsilon(i)$ converge, trouvons les d. d. $D[\varepsilon(1)]$, $D[\varepsilon(2)]$, ... On a

$$\| \Sigma_{a \in D[\varepsilon(1)] \times \ldots \times D[\varepsilon(n)]} \chi(a) - \Sigma_{a \in D[\varepsilon(1)] \times \ldots \times D[\varepsilon(n+1)]} \chi(a) \| \leqq \varepsilon(n).$$

Il en résulte que la suite $\Sigma_{a \in D[\varepsilon(1)] \times \ldots \times D[\varepsilon(n)]} \chi(a)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ converge vers un certain vecteur y. Pour tout $\varepsilon(k)$ il existe un indice $p(k) > k$ tel que

$$\| y - \Sigma_{a \in D[\varepsilon(1)] \times \ldots \times D[\varepsilon(p(k))]} \chi(a) \| \leqq \varepsilon(k);$$

donc, si D' est une e. d. de $D_{\varepsilon(1) \times \ldots \times \varepsilon[p(k)]}$, on a

$$\| \Sigma_{a \in D[\varepsilon(1)] \times \ldots \times D[\varepsilon(p(k))]} \chi(a) - \Sigma_{a \in D'} \chi(a) \| \leqq \varepsilon[p(k)];$$

donc $\| y - \Sigma_{a \in D'} \chi(a) \| \leqq 2 \varepsilon(k)$, ce qui prouve le théorème.

Théorème. — *Si $\chi(a)$ est intégrable sur la totalité 1, $\chi(a)$ est intégrable sur tout élément $e \subseteq 1$.*

Démonstration. — Soit D une d. d. de 1, telle que pour toute son e. d. $D' = (a'_1, a'_2, \ldots)$ on ait $\| y - \Sigma_i \chi(a'_i) \| \leqq \varepsilon$. $a'_1 e$, a'_1 *coe*, $a'_2 e$, a'_2 *coe* ..., est une e. d. $D(e)$ de D et, $a'_1 e$, $a'_2 e$, ..., est une d. d. $D^\star$ de e. Soient D^1, D^2 deux e. d. quelconques de $D^\star : b^1_1, b^1_2, \ldots$, et $b^2_1, b^2_2, \ldots$. On a $\| \Sigma_i \chi(b^1_i) + \Sigma_j \chi(a'_j \, coe) - y \| \leqq \varepsilon$, $\| \Sigma_k \chi(b^2_k) + \Sigma_j \chi(a'_j \, coe) - y \| \leqq \varepsilon$. Par conséquent $\| \Sigma_i \chi(b^1_i) - \Sigma_k \chi(b^2_k) \| \leqq 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour toutes les e. d. D^1, D^2 de $D^\star$, il en résulte, d'après le théorème précédent, que $\chi(a)$ est intégrable sur e.

Théorème. — *Si e', e'' sont deux éléments disjoints de (T) et si $\chi(a)$ est intégrable sur 1, on a $\int_{e'+e''} = \int_{e'} + \int_{e''}$.*

Démonstration. — Il suffit de supposer que $e' \neq 0$, $e'' \neq 0$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe des d. d. $D(e)$, $D(e')$, $D(e'')$ sup. de $e = e' + e''$, e', e'' telles que pour leurs e. d. respectives $D'(e)$, $D'(e')$, $D''(e'')$ on ait $\| \int_e - \Sigma_{a \in D'(e)} \chi(a) \| \leqq \varepsilon$, etc. Il en résulte que $\| \int_e - \Sigma_{a \in [D(e') \times D(e)] + [D(e'') \times D(e)]} \chi(a) \| \leqq \varepsilon$ et $\| (\int_{e'} + \int_{e''}) - \Sigma_{a \in \text{detto}} \chi(a) \| \leqq \varepsilon$. ce qui démontre le théorème.

Théorème. — *L'intégrale est une fonction dénombrablement additive.*

(³) O. M. Nikodym, *Comptes rendus*, 224, 1947, pp. 778-780.

Démonstration. — Soit $e = \Sigma e(i)$ où $e(i)$ sont disjoints, soit $\varepsilon > 0$. Trouvons une d. d. $D(e)$ de e telle que pour toute son e. d. $D'(e)$ on ait $\| \int_e - \Sigma_{a\in D'(e)} \chi(a) \| \leqq \varepsilon$. Désignons par Δ la d. d. $e(1)$, $e(2)$, ..., de e, comme $\int_{e(n)}$ existe, il existe une d. d. $D[e(n)]$ de $e(n)$ telle que pour toute son e. e., $D'[e(n)]$ on ait

$$\| \int_{e(n)} - \Sigma_{a\in D'[e(n)]} \chi(a) \| \leqq \varepsilon/2^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Donc on a $\| \int_e - z \| \leqq \varepsilon$ où $z = \Sigma_{a\in[D(e(1))\times D(e)\times\Delta]} \chi(a) + \ldots$. Cette somme étant convergente, il existe un nombre N tel que, si $n \geqq N$,

$$\| \Sigma_{a\in D(e(1))\times D(e)\times\Delta} \chi(a) + \ldots + \Sigma_{a\in D(e(n))\times D(e)\times\Delta} \chi(a) - z \| \leqq \varepsilon.$$

Il en résulte que $\| \text{detto} - \int_e \| \leqq 2\varepsilon$; mais, comme

$$\| \text{detto} - [\int_{e(1)} + \ldots + \int_{e(n)}] \| \leqq \varepsilon/2^1 + \varepsilon/2^2 + \ldots + \varepsilon/2^n < 2\varepsilon,$$

on obtient $\| \int_e - [\int_{e(1)} + \ldots + \int_{e(n)}] \| \leqq 4\varepsilon$ pour tout $n \geqq N$. Ceci donne $\lim \Sigma \int_{e(i)} = \int_e$. Remarquons que si, au lieu des d. d., on utilisait des décompositions finies, l'intégrale serait additive mais non nécessairement dénombrablement additive.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les suites d'exposants à densité supérieure finie.* Note [1] de M. **Aryeh Dvoretzky**, présentée par M. Jacques Hadamard.

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite monotone de nombres positifs tendant vers l'infini. On rencontre de telles suites dans les théories des séries de puissances, fonctions quasi analytiques, des familles complètes de fonctions, des zéros des fonctions entières, des séries asymptotiques, etc., et surtout dans la théorie des séries de Dirichlet où elles forment les *suites d'exposants.*

Posons, pour $0 < \lambda < \infty$,

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1, \qquad D(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\lambda}, \qquad \overline{D}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda D(x)\,dx$$

et

$$D^* = \limsup_{\lambda \to \infty} D(\lambda), \qquad \overline{D}^* = \limsup_{\lambda \to \infty} \overline{D}(\lambda).$$

D^* est la densité supérieure de $\{\lambda_n\}$. $\overline{D}^*$ est la densité moyenne supérieure. M. S. Mandelbrojt [2] a montré l'importance de cette dernière notion. Nous nous bornons dans cette Note au cas des suites $\{\lambda_n\}$ avec D^* fini.

Dans ce cas on peut définir

$$\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

---

(1) Séance du 15 septembre 1947.

(2) *Sur une inégalité fondamentale* [*Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), LXIII, fasc. 4, p. 315].

Cette fonction joue un rôle essentiel dans l'étude des séries de Dirichlet, etc. C'est surtout

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sz} \Lambda(iz)\, dz,$$

transformée de Laplace de $\Lambda(iz)$, qui intervient dans les calculs. La fonction $L(s)$ est régulière pour $|s| > \Lambda^*$, où

$$\Lambda^* = \limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log \Lambda(r).$$

2. Le théorème suivant donne des relations entre D^*, $\bar{D}^*$ et Λ^* qui peuvent être utiles dans les théories mentionnées.

Théorème 1. — *On a toujours, pour* $D^* < \infty$ [3]

$$\frac{D^*}{e} \leq D^* \leq \bar{D}^*, \tag{1}$$

$$C_1 D^* \leq \Lambda^* \leq \pi \bar{D}^*, \tag{2}$$

où

$$C_1 = \max_{x > 0} \frac{1}{x} \log(1 + x^2) = 0{,}804\ldots,$$

$$e C_1 D^* \leq \Lambda^* \leq \pi D^*. \tag{3}$$

De plus, ces inégalités sont les meilleures possibles.

La seconde inégalité (1) est évidente; la seconde inégalité (2) est due à Carlson; elle est plus faible que la seconde inégalité (3) qui est due à M. Mandelbrojt [2]. Les autres inégalités semblent être nouvelles.

Pour les suites $\{\lambda_n\}$, pour lesquelles $\lim\limits_{\lambda \to \infty} D(\lambda)$ existe, c'est-à-dire pour les suites mesurables, on a $\bar{D}^* = D^*$ et $\Lambda^* = \pi D^* = \pi \bar{D}^*$. Pour démontrer que les premières inégalités (1), (2) et (3) ne peuvent pas non plus être améliorées, on construit des suites *lacunaires* où les λ_n sont répartis dans des groupes très écartés l'un de l'autre, tandis que les λ_n appartenant à un même groupe sont très voisins l'un de l'autre.

3. L'indicatrice de croissance de $\Lambda(z)$ est définie par

$$h(\psi) = \limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |\Lambda(re^{i\psi})| \qquad (0 \leq \psi < 2\pi).$$

Évidemment $h(0) = \Lambda^*$, et l'on peut démontrer l'inégalité au sens strict

$$h(\psi) < \Lambda^* \qquad \text{pour } 0 < \psi < \pi \qquad \text{et} \qquad \pi < \psi < 2\pi.$$

Appliquant la théorie du diagramme conjugué, on en tire le théorème suivant :

Théorème 2. — *Pour* $0 < D^* < \infty$, *les deux points* $s = \pm i\Lambda^*$ *sont les seuls points singuliers de* $L(s)$ *sur* $|s| = \Lambda^*$.

([3]) Si $D^* = \infty$, on a aussi $\bar{D}^* = \infty$ et [pourvu que $\Lambda(z)$ soit définie] $\Lambda^* = \infty$.

4. Dans les théories des séries entières, de la quasi-analyticité, etc., on rencontre surtout des suites $\{\lambda_n\}$ avec λ_n entiers. Pour de telles suites on peut améliorer les premières parties des inégalités (1) à (3). Nous ne mentionnons ici que le théorème suivant :

Théorème 3. — *Si les λ_n sont entiers, alors on a*

$$(4) \qquad \varphi(D^{\bullet})\, D^{\bullet} \leqq \overline{D}^{\bullet} \leqq D^{\bullet},$$

où

$$\varphi(t) = (1-t)^{\frac{1-t}{t}},$$

les inégalités (4) étant les meilleures possibles.

Remarques. — I. Si les λ_n sont entiers on a $0 \leqq D^{\bullet} \leqq 1$, et l'on voit facilement que $\varphi(t)$ va en croissant de $1/e$ à 1 lorsque t croît de 0 à 1.

II. Le théorème reste vrai si au lieu de supposer les λ_n entiers on suppose

$$\liminf_{n \to \infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geqq 1.$$

De même on n'a qu'à remplacer $\varphi(D^{\bullet})$ par $\varphi(D^{\bullet}h)$ dans (4) pour que le théorème soit vrai pour les suites $\{\lambda_n\}$ avec $\liminf_{n \to \infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$.

Les démonstrations seront publiées ailleurs.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Théorèmes taubériens généraux* II. Note de M. **Hubert Delange**, présentée par M. Paul Montel.

Nous nous proposons ici de donner des théorèmes taubériens relatifs aux intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{x}\right) ds(t)$, où $s(t)$ est non décroissante [1]. Nous illustrerons ces théorèmes par une application aux fonctions entières à zéros réels et négatifs. α et β étant deux nombres réels quelconques, nous désignerons par $\mathcal{K}[\alpha, \beta]$ la classe des fonctions réelles K de la variable réelle positive u, continues et telles que $K(u)u^{\alpha}$ tende vers une limite finie différente de zéro lorsque u tend vers zéro, ainsi que $K(u)u^{\beta}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

Nous désignerons par $\mathcal{S}[\alpha, \beta]$ la classe des fonctions réelles non décroissantes s de la variable réelle positive t telles que les intégrales $\int_0 t^{-\alpha} ds(t)$ et $\int^{+\infty} t^{-\beta} ds(t)$ soient convergentes.

Si $K \in \mathcal{K}[\alpha, \beta]$ et $s \in \mathcal{S}[\alpha, \beta]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} K(t/x)\, ds(t)$ converge quel que soit x réel possitif. D'autre part, à la fonction $K \in \mathcal{K}[\alpha, \beta]$ nous associons, si $\alpha < \beta$, la fonction

$$C(z) = z\int_0^{+\infty} K(u)\, u^{z-1}\, du.$$

---

[1] Nous avons déjà étudié ces intégrales dans une Note précédente (*Comptes rendus*, **217**, 1943, pp. 309-311).

THÉORÈME 1. — *Soit* $K \in \mathcal{K}[\omega_1, \omega_2]$, *avec* $0 \leq \omega_1 < \omega_2$, *et supposons* $K(u) > 0$.

Soit d'autre part $\rho(x)$ une fonction réelle définie pour x réel positif assez grand (ou assez petit) et satisfaisant pour x tendant vers $+\infty$ (ou vers zéro) à

$$\omega_1 < \underline{\lim}\,\rho(x) \leq \overline{\lim}\,\rho(x) < \omega_2,$$

et

$$\lim[\rho(kx) - \rho(x)]\log x = 0, \qquad \textit{uniformément pour} \quad \varepsilon \leq k \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Supposons que $C(z)$ n'ait aucun zéro satisfaisant à

$$(1) \qquad \underline{\lim}\,\rho(x) \leq \mathcal{R}[z] \leq \overline{\lim}\,\rho(x).$$

Alors, si $s \in \mathcal{S}[\omega_1, \omega_2]$ et $s(+0) = 0$, pour que l'on ait pour x tendant vers $+\infty$ (vers zéro)

$$\int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{x}\right) ds(t) \sim A x^{\rho(x)},$$

il faut et il suffit que pour t tendant vers $+\infty$ (vers zéro)

$$s(t) \sim \frac{A t^{\rho(t)}}{C[\rho^{(t)}]} \quad [2].$$

THÉORÈME 2. — *Même énoncé en remplaçant les hypothèses* $K(u) > 0$ *et* $C(z)$ *sans aucun zéro satisfaisant à* (1) *par les suivantes :*

a. Il existe un nombre réel ω compris entre ω_1 et ω_2 tel que, si

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t),$$

avec s_1 et $s_2 \in \mathcal{S}[\omega_1, \omega_2]$, et $s(+0) = 0$, le fait que $\int_0^{\infty} K(t/x)\, ds(t) = 0$ pour tout x positif, entraîne $s(t)/t^{\omega} =$ const., sauf peut-être sur un ensemble dénombrable.

b. Suivant le cas : $\omega < \underline{\lim}_{x \to +\infty}\, \rho(x)$ ou $\omega > \overline{\lim}_{x \to 0}\, \rho(x)$ [3].

THÉORÈME 3. — *Soit* $K \in \mathcal{K}[\omega_1, \omega_2]$, *avec* $\omega_1 < \omega_2$, *et supposons* $K(u) > 0$ *et que* K *possède la propriété suivante :*

Si s_1 et $s_2 \in \mathcal{S}[\omega_1, \omega_2]$, le fait que

$$\int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{x}\right) d s_1(t) = \int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{x}\right) d s_2(t),$$

pour tout x positif entraîne que s_1 et s_2 aient les mêmes points de discontinuité et diffèrent par une constante aux autres points.

Alors, si s_1 et $s_2 \in \mathcal{S}[\omega_1, \omega_2]$ et si l'on a pour x tendant vers $+\infty$ (vers zéro),

$$\int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{x}\right) d s_1(t) \sim \int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{x}\right) d s_2(t),$$

---

(2) Le cas $\rho(x) = \rho_0$ constant se ramène à un cas particulier d'un théorème connu de Wiener (*Annals of Math.*, 33, 1932, p. 32, th. XI‴) par le changement de variables $t^{\rho_0} = \tau$, $x^{\rho_0} = \xi$.

(3) On peut donner pour les théorèmes 1 et 2 des énoncés valables sans l'hypothèse $\omega_1 \geq 0$.

la même relation subsiste en remplaçant K par toute autre fonction positive de la classe $\mathcal{K}[\omega_1, \omega_2]$.

II. *Application aux fonctions entières à zéros réels et négatifs.* — *a.* Les théorèmes 1 et 2 permettent d'établir le résultat suivant :

Soit $f(z)$ une fonction entière de genre $p \geq 1$, à zéros réels et négatifs, et soit $n(t)$ le nombre de ces zéros de module au plus égal à t.

Soit $\rho(x)$ une fonction réelle définie pour x réel positif assez grand et satisfaisant à

$$p < \varliminf_{x \to +\infty} \rho(x) \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \rho(x) < p+1$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} [\rho(kx) - \rho(x)] \log x = 0 \quad \text{uniformément pour} \quad \varepsilon \leq k \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Le fait que pour un θ fixe de module $< \pi$ l'on ait pour r infini

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim A r^{\rho(r)} \cos\theta\rho(r)$$

entraîne que l'on ait pour t infini

$$n(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi\rho(t),$$

pourvu qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| \leq m\frac{\pi}{2\rho_1}, \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \varliminf_{x \to +\infty} \rho(x) \quad (^4)$$

[le résultat est d'ailleurs inexact s'il existe un entier impair m tel que $m\pi/2(p+1) < |\theta| < m\pi/2\rho_1$].

b. Le théorème 3 permet d'établir le premier résultat donné au paragraphe I, *a* de notre Note *Sur certaines fonctions entières* ([5]), dans le cas $p \geq 1$.

Une adaptation convenable de nos théorèmes permet d'établir les mêmes résultats pour $p = 0$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur le nombre des zéros et des pôles distincts d'une fonction méromorphe dans un contour fermé.* Note ([1]) de M. **Stéphan Serghiesco**, transmise par M. Jules Drach.

1. Dans une Note récente ([2]) j'ai tenté de déterminer le nombre des zéros et des pôles distincts d'une fonction $F = g/h$, où g et h sont holomorphes, qui sont à l'intérieur d'un contour C. L'intégrale

$$I = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F'^2 - FF''}{FF'} dz,$$

([4]) Comparer à H. Delange, *Annales E. N. S.*, 72, II, 1945, p. 168.

([5]) *Comptes rendus*, 222, 1946, pp. 853-854.

([1]) Séance du 15 septembre 1947.

([2]) *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 440.

où

$$\frac{F'}{F''}-\frac{F''}{F'}=\frac{g'}{g}+\frac{h'}{h}-\frac{\Phi'}{\Phi} \quad \text{et} \quad \Phi=gh'-hg',$$

donne ce nombre diminué du nombre des zéros de Φ, n'annulant pas gh, qui sont dans C (nombre fini); ces derniers étant comptés avec leur ordre de multiplicité.

Le facteur Φ est un invariant différentiel du faisceau $\lambda g+\mu h=0$. Il ne change pas si l'on remplace g par $\alpha g+\beta h$, α, β étant des constantes, ou h par une expression analogue. Si, pour une valeur de λ/μ, $\lambda g+\mu h$ a le facteur $(z-z_0)^m$, Φ a le facteur $(z-z_0)^{m-1}$. Réciproquement, si Φ a le facteur $(z-z_0)^{m-1}$, pour $\lambda g(z_0)+\mu h(z_0)=0$ le terme $\lambda g+\mu h$ a le facteur $(z-z_0)^m$. La fonction Φ est donc le produit des facteurs multiples des termes $\lambda g+\mu h$, leur exposant étant diminué d'une unité. Seuls les facteurs $(z-z_0)^{m-1}$ où z_0 est dans C interviennent. Si Φ n'a dans C que les facteurs de g et h qui sont multiples, l'intégrale I donne le résultat cherché.

2. Lorsque g et h sont des polynomes d'ordre p, F est rationnel et Φ est un polynome de degré $(2p-2)$. Cet invariant différentiel Φ a été étudié pour $p=4$ par C. Stephanos [3] et en général par D. Hilbert [4]. Ce dernier a montré par la théorie des formes que *le nombre des faisceaux distincts* $\lambda g+\mu h$ *qui donnent un même* Φ *est limité;* il est $N=(p+1)\ldots(2p-2):1.2\ldots(p-1)$. Ce nombre croît très vite avec p : $p=2$, $N=1$; $p=3$, $N=2$; $p=4$, $N=5$; $p=5$, $N=14$; $p=6$, $N=42$; $p=7$, $N=132$; $p=8$, $N=429$. La détermination des faisceaux dépend d'une équation de degré N qui peut avoir des racines multiples et ne donne pas toujours N types distincts; la question appelle d'autres recherches.

Un élément essentiel est le nombre des valeurs remarquables de $\lambda:\mu$, c'est-à-dire des valeurs pour lesquelles $\lambda g+\mu h$ a *au moins* un facteur multiple.

Si $\Phi=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m-1}$ avec $\alpha_1+\ldots+\alpha_m-m=2p-2$, on a pour une de ces valeurs

$$\lambda' g+\mu' h=C(x-a'_1)^{\alpha'_1}\ldots(x-a'_{m'})^{\alpha'_{m'}}Q',$$

où les a'_i sont m' termes pris parmi les a_i, α'_i coïncidant avec α_i si $a'_i=a_i$ et où Q' de degré q' n'a que des facteurs simples; on a donc $\alpha'_1+\ldots+\alpha'_{m'}=p-q'$ et pour un Φ convenable on peut avoir un g de ce type. S'il y a k valeurs remarquables, le produit $(\lambda' g+\mu' h)(\lambda'' g+\mu'' h)\ldots$ des k facteurs donne

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_m=2p-2+m=kp-r,$$

où r est le degré du produit des facteurs simples, qui est connu ainsi.

Dans le cas de deux valeurs remarquables, qui donneront g et h, on partagera Φ en deux facteurs, et les équations

$$\alpha'_1+\ldots+\alpha'_{m'}+q'=p, \qquad \alpha''_1+\ldots+a''_{m''}+q''=p$$

(3) C. Stephanos, *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris*, 27, 1883.
(4) D. Hilbert, *Math. Annalen*, 33, 1889, p. 227; *Werke*, II, p. 165.

donneront, avec $m' + m'' = m$,

$$q' + q'' = 2 - m,$$

ce qui exige $m = 1$ ou $m = 2$. Si $m'm'' \neq 0$, il faut donc $m' = m'' = 1$.

Lorsque Φ n'a que des facteurs simples, $\lambda g + \mu h$ n'a que des facteurs doubles. En général, on peut trouver $(2p - 2)$ valeurs remarquables pour $\lambda : \mu$, avec un seul facteur double, mais il peut arriver qu'un terme $\lambda g + \mu h$ possède plusieurs facteurs doubles, ce qui diminue le nombre des valeurs remarquables.

La théorie des formes donne des identités qui conduisent à plusieurs valeurs remarquables pour le faisceau $\lambda g + \mu h = 0$, si l'on pose $z = x : y$ et si l'on remplace Φ par $\partial(g, h)/\partial(x, y)$. En particulier les identités de Halphen $X^n + Y^m = Z^p$ où X, Y, Z sont des polynomes [ou des fonctions doublement périodiques] donnent, avec $g = X^n$, $h = Y^m$, trois valeurs remarquables.

AÉRODYNAMIQUE SUPERSONIQUE. — *Solution approchée des écoulements coniques infinitésimaux.* Note [1] de M. **Paul Germain**, présentée par M. Joseph Pérès.

1. Le but de cette Note est l'étude de l'écoulement autour de cônes quelconques infinitésimaux, c'est-à-dire dont toutes les génératrices font un angle petit avec la direction du vent. Le problème, une fois linéarisé [2], consiste à trouver trois fonctions analytiques U(Z), V(Z), W(Z) définies à une constante imaginaire près, dans une aire annulaire $\mathcal{A}$ dont les parties réelles u, v, w représentent les composantes de la vitesse de perturbation, telles que

$$(1)\qquad -\beta\frac{dU}{dZ} = \frac{2Z}{Z^2+1}\frac{dV}{dZ} = \frac{2iZ}{Z^2-1}\frac{dW}{dZ} \qquad (\beta = \sqrt{M^2-1}),$$

$$(2)\qquad u = v = w = 0 \quad \text{sur } C_0,$$

$$(3)\qquad v[\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta + \rho'(\rho\cos\theta - \rho'\sin\theta)] + w[\rho\sin\theta - \rho'\cos\theta + \rho^2(\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta)] = \frac{2\rho^2}{\beta} \quad \text{sur } C.$$

C_0 est le cercle de rayon 1 représentant le cône de Mach, C intérieur à C_0 représente l'obstacle étudié; $\mathcal{A}$ est l'aire comprise entre C et C_0. Si $\rho = \rho^{(0)}$ est l'équation polaire de C, on suppose que $\rho^{(0)}$ et $\rho'^{(0)}$ sont bornés par un nombre k tel que $k \ll 1$.

2. A partir des relations (1) et (2) on peut montrer que si M désigne le

---

(1) Séance du 21 juillet 1947.

(2) P. Germain, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 183. La variable utilisée ici est liée à la variable ζ de la Note citée par la relation $Z = e^{\zeta}$.

maximum de $|V(Z)|$ dans $\mathcal{A}$, on a, tout au moins au voisinage de C_0,

$$(4)\quad \begin{cases} V(Z) = K_1\left(\frac{1}{Z} - Z\right) + \sum_2^{\infty} \frac{K_n}{Z^n} + O(Mk^2 \operatorname{Log} k) \quad [3], \\ W(Z) = iV(Z) + O(Mk^2 \operatorname{Log} k), \\ \frac{\beta}{2} U(Z) = K_1 \operatorname{Log} Z - \frac{3}{2}\left(\frac{K_2}{Z} - \overline{K_2} Z\right) - \sum_3^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{K_n}{Z^n} + O(Mk^3 \operatorname{Log} k), \end{cases}$$

K_1 doit être réel, et les K_n sont $O(Mk^n)$.

En posant $H(Z) = \sum_1^{\infty} \frac{K_n}{Z^n}$, on voit que, en première approximation,

$$(5)\qquad V(Z) = H(Z) - K_1 Z, \qquad U(Z) = -\frac{2}{\beta}\left[\int Z \frac{dH}{dZ} dZ - \frac{3}{2} \overline{K_2} Z\right].$$

Avec l'approximation faite, la fonction $H(Z)$ est holomorphe à l'extérieur de C, et (3) montre qu'elle satisfait sur C à la relation

$$(6)\qquad R\left\{-iH \frac{dZ}{d\theta}\right\} = \frac{2\rho^2}{\beta}. \quad [4]$$

$H(Z)$ est déterminé par une condition d'Hilbert; soit $z(Z)$ la transformation conforme canonique appliquant l'extérieur de C sur un cercle γ du plan z, et posons $F(Z) = i \operatorname{Log} z/r$, $z = re^{i\varphi}$ sur le cercle γ; (6) s'écrit

$$(7)\qquad R\left\{i \frac{H(Z)}{F'(Z)}\right\} = \frac{2\rho^2}{\beta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2}{\beta} R\left\{z \overline{Z} \frac{dZ}{dz}\right\}.$$

Soit enfin $G(Z)$ la fonction holomorphe à l'extérieur de C régulière et réelle à l'infini dont la partie réelle prend sur C les valeurs $2\rho^2 d\theta/\rho\, d\varphi$.

On a

$$(8)\qquad H(Z) = -i F'(Z) G(Z),$$

l'unicité de la solution étant assurée par le fait que K_1 est réel [5].

Une conséquence immédiate de (7) est que si deux contours C, $Z_0(\theta)$ et $Z_1(\theta)$ sont tels que $Z_1 = Z_0 + \alpha$ (α étant constant), les fonctions H_0 et H_1 correspondantes satisfont à l'équation

$$H_1 = H_0 + \frac{2}{\beta}\left[\alpha \frac{r^2}{z^2} \frac{dz}{dZ} + \overline{\alpha}\left(1 - \frac{dz}{dZ}\right)\right].$$

3. Voici quelques applications immédiates :

Si C est un cercle de rayon r centré au point $Z = a$ (réel)

$$U(Z) = \frac{4r^2}{\beta^2}\left[\operatorname{Log}(Z-a) - \frac{3a}{Z-a} - \frac{a^2}{(Z-a)^2} + 4aZ\right].$$

---

(3) O désigne le symbole de Landau : $O(Mk^2 \operatorname{Log} k)$ représente une quantité d'ordre $Mk^2 \operatorname{Log} k$.

(4) R désigne la partie réelle.

(5) On montre que $K_1 = 2S/\pi\beta$, S étant l'aire de C.

On retrouve, à l'approximation prévue, la formule donnée par Busemann [6].

Si C est une ellipse d'axes OX, OY,

$$\mathrm{U}(\mathrm{Z}) = \frac{4}{\beta^2}\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right)\left\{\operatorname{Log}\frac{\mathrm{Z}+\sqrt{\mathrm{Z}^2-4a^2}}{r} - \frac{\sqrt{\mathrm{Z}^2-4a^2}-\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{Z}^2-4a^2}}\right\} \quad [7],$$

ce qui fournit une expression simple pour la pression.

La remarque faite à la fin du paragraphe 2 permet, en passant à la limite, d'étudier immédiatement l'aile Δ portante, quand l'angle ω_0 du Δ est petit. On trouve en particulier

$$\frac{dc_z}{di} = 2\pi \operatorname{tang}\omega_0,$$

formule déjà trouvée par R. T. Jones [8] et M. J. Stewart [9] par des méthodes différentes.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Simplification du système principal d'équations des méthodes d'Olbers et de Gauss pour la détermination des orbites paraboliques.* Note [1] de M. **Benjamin de Jekhowsky**, transmise par M. Ernest Esclangon.

Dans la méthode d'Olbers pour la détermination des orbites paraboliques, comme dans celles de Gauss et de Gauss-Merton [2], les distances géocentriques ρ_1 et ρ_2 des lieux extrêmes de l'astre sont données par deux groupes d'équations du système suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{P}_1\rho_1^2+\mathrm{P}_2\rho_1+\mathrm{P}_3 = s^2, & r_1^2 = \rho_1^2+2\mathrm{S}_1\rho_1+\mathrm{R}_1^2, \\ (r_1+r_2+s)^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-s)^{\frac{3}{2}} = 6\tau, & r_2^2 = \rho_2^2+2\mathrm{S}_2\rho_2+\mathrm{R}_2^2, \end{cases} \qquad \rho_2 = \mathrm{M}\rho_1,$$

que l'on résout par approximations successives, en appliquant soit la méthode de Gauss, qui consiste en une série de tâtonnements, soit celle d'Encke, qui consiste en une suite de formules, donnant lieu toutes deux à des calculs généralement très longs.

Nous avons déjà montré que, les observations étant rapprochées, le premier groupe d'équations du système (1) se réduit à une seule équation [3].

---

(6) *Infenitesimale kegelige Uberschallströmung* (*Deutsche Akad. der Luftfahrtforschung*, 1943.

(7) (8) s'écrit alors $\mathrm{Z} = z + a^2/z$.

(8) *N. A. C. A. Tech.*, Note n° **1032**, 1945.

(9) *The lift of a delta wing at supersonic speeds* (*Quart. of Appl. Math.*, oct., 1946).

(1) Séance du 25 août 1947.

(2) *A modification of Gauss's method for the determination of orbits* (*Monthly Notices of R. A. S.*, June 1925, pp. 693-730).

(3) Équation (4) de ma Note, *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 783-785.

Mais, les méthodes ci-dessus servant en général au calcul des orbites à l'époque de la découverte de l'astre, afin de pouvoir obtenir au plus tôt des éléments permettant de calculer une éphéméride provisoire, et l'emploi de logarithmes à cinq et même quatre décimales suffisant alors largement, le second groupe d'équations du système (1) peut être réduit aussi à une seule équation.

D'une façon évidente on obtient d'abord

$$(2)\qquad r_1^2 + r_2^2 = (1 + M^2)\rho_1^2 + 2(S_1 + S_2 M)\rho_1 + R_1^2 + R_2^2.$$

En considérant ensuite l'identité

$$(A + B)^2 + (A - B)^2 \equiv 2(A^2 + B^2),$$

si

$$(3)\qquad A \neq B,$$

nous pouvons écrire

$$2(A^2 + B^2) \neq (A + B)^2.$$

Or, les quantités r_1, r_2, R_1, R_2, M, S_1, S_2 qui interviennent dans le calcul de l'équation (2), vu les intervalles de temps d'observations petits et la position de l'astre à l'époque de sa découverte, satisfont tous à la condition (3) et sont de la forme

$$A = 1 + \varepsilon_a, \qquad B = 1 + \varepsilon_b;$$

de sorte qu'avec une erreur absolue $\varepsilon = (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2$ nous pouvons écrire

$$(4)\quad 2(r_1^2 + r_2^2) \neq (r_1 + r_2)^2, \qquad 2(R_1^2 + R_2^2) \neq (R_1 + R_2)^2, \qquad 2(1 + M^2) \neq (1 + M)^2,$$

et de même

$$S_1 \neq S_2.$$

Cette dernière relation après avoir multiplié chaque membre par $(1 - M)$, puis avoir ajouté à chacun d'eux la somme $S_1 + 2S_2M$, par une transformation simple donne

$$(5)\qquad 2(S_1 + S_2 M) \neq (S_1 + S_2)(1 + M).$$

Avec (4) et (5), l'équation (2) s'écrit

$$(2')\quad 2^{-1}(r_1 + r_2)^2 = 2^{-1}(1 + M)^2\rho_1^2 + (S_1 + S_2)(1 + M)\rho_1 + 2^{-1}(R_1 + R_2)^2,$$

et le système (1) devient

$$(1')\qquad \begin{cases} P_1\rho_1^2 + P_2\rho_1 + P_3 = 4\tau^2(r_1 + r_2)^{-1}, \\ (1 + M)^2\rho_1^2 + 2(S_1 + S_2)(1 + M)\rho_1 + (R_1 + R_2)^2 = (r_1 + r_2)^2, \end{cases}$$

c'est-à-dire un système analogue à celui de la méthode Lagrange-Andoyer.

Ainsi la méthode ([3]) que nous avons indiquée récemment pour la résolution de ce dernier peut être également appliquée ici avec un grand avantage et, si l'on veut, la méthode de Newton devient aussi utilisable.

Voici un exemple : Comète 1925 *c* (Orkisz). Les intervalles de temps d'observation étant de 4,5 jours,

$$[P_1]=[2,52311]; \qquad [P_2]=[2,66564_n]; \qquad [P_3]=[5,37681]; \qquad [4\tau^2]=[2,98171];$$
$$[2(S_1+S_2)]=[0,48139_n]; \qquad [1+M]=[0,28703]; \qquad [R_1+R_2]=[0,30186].$$

Sans difficulté on trouve

$$[\rho_1]_1=[0,14253]; \qquad [\Sigma r_{1,2}]_1=[0,60489]; \qquad [\Sigma r_{1,2}]_{(1)}=[0,26057];$$
$$[\rho_1]_2=[0,19436]; \qquad [\Sigma r_{1,2}]_2=[0,46324]; \qquad [\Sigma r_{1,2}]_{(2)}=[0,30186].$$

Les formules (6) et (7) de ma précédente Note [4] donnent

$$[\rho_1]_3=[0,14253]+0,09756=[0,19436]+0,04573=[0,24009].$$

Puis, avec une seule approximation, on a

$$[\rho_1]_4=[0,19436]+0,04105=[0,24009]-0,00468=[0,23541],$$

de sorte que

$$\rho_1=1,720 \qquad \text{et} \qquad \rho_2=M\rho_1=1,611.$$

Ce résultat justifie pleinement ce qui a été dit. Étant donné des observations embrassant déjà 9 jours, on trouve pour ρ_1 et ρ_2 des valeurs exactement identiques à celles que l'on obtient par les méthodes mentionnées ci-dessus.

ASTROPHYSIQUE. — *Sur la constance du flux intégré dans les atmosphères stellaires et la résolution de l'équation de transfert.* Note [1] de M. **Vladimir Kourganoff**, transmise par M. Bernard Lyot.

La plupart des théories des atmosphères stellaires utilisent, plus ou moins explicitement, comme condition caractéristique des couches photosphériques, celle de la constance du flux intégré du rayonnement continu. Cependant, pour résoudre l'équation de transfert, on est conduit généralement à faire un certain nombre d'approximations (telles que $K=(1/3)J$, itération arrêtée à un certain stade, ou remplacement des intégrales par des sommes approchées, etc.) qui font que le flux intégré $\mathcal{F}(\tau)$ *relatif aux solutions* n'est pas rigoureusement constant. Il en est ainsi même lorsqu'au cours des calculs on a employé des équations qui expriment la conservation rigoureuse du flux. Cet effet ne semble pas avoir reçu encore toute l'attention qu'il mérite.

Le critérium de la qualité d'une solution, le plus employé, a été jusqu'à présent la conformité de la loi d'assombrissement correspondante, soit avec l'assombrissement observé, dans le cas du Soleil, soit avec l'assombrissement

---

(4) *Comptes rendus*, **224**, 1947, pp. 1697-1699.

(1) Séance du 18 août 1947.

théorique exact obtenu par Hopf dans l'hypothèse standard du corps gris. Dans le premier cas, il est peu satisfaisant de faire appel à des données d'observation pour juger du degré de cohérence interne d'une théorie, et de plus des recherches récentes ont montré que ce critère pour être efficace devrait utiliser des observations d'une précision jamais encore atteinte; aussi a-t-on vu les théories les plus différentes, et certaines très imparfaites, se prévaloir successivement d'une explication satisfaisante de l'assombrissement solaire. En particulier la faveur persistante de l'hypothèse du corps gris, semble due autant à l'imperfection du critérium de l'assombrissement qu'à sa commodité mathématique. Dans le deuxième cas, la méthode est plus satisfaisante du point de vue théorique, mais en revanche son emploi est précisément limité à l'hypothèse du corps gris et surtout ne semble pas avoir un grand pouvoir heuristique.

Nous proposons donc un critérium, que nous croyons nouveau, et plus puissant que l'ancien. Soit

$$\sigma = \int_0^\infty \left[\frac{\mathcal{F}(\tau)}{F} - 1\right]^2 d\tau, \tag{1}$$

l'écart quadratique « intégral » entre le *flux-solution* $\mathcal{F}(\tau)$ et la valeur théorique constante, F, du flux, liée par hypothèse au flux émergent et à la température effective T_e. Nous préciserons dans une Note ultérieure comment on doit appliquer la méthode dans le cas où $\varkappa_\lambda$ varie avec λ, et nous nous placerons pour commencer dans le cas standard du corps gris.

Il est naturel d'admettre que les solutions les meilleures sont celles qui donnent le plus petit σ, c'est-à-dire le flux le plus constant dans son ensemble. Or, chaque solution est caractérisée avant tout par une certaine *fonction-source* (Ergiebigkeit) B, de τ, qui donne, dans l'hypothèse usuelle de l'équilibre thermodynamique local, la loi de répartition des températures T en fonction de τ. Presque toutes les solutions existantes sont comprises dans la formule générale

$$B(\tau) = \sum_i \frac{b_i}{i!}\tau^i + \sum_n a_n e^{-\beta_n \tau}. \tag{2}$$

Or, à cette expression de $B(\tau)$ correspond l'expression générale suivante de $\mathcal{F}(\tau)$, qui, d'ailleurs, se simplifie notablement dans les différents cas rencontrés dans la pratique :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau) = & \sum_i b_i \left[2(-1)^i K_{i+3}(\tau) + \sum_{k=0}^{i} \frac{2\tau^k}{k!}\left(\frac{1-(-1)^{i+2-k}}{i+2-k}\right)\right] \\ & + \sum_n a_n \left\{ \frac{2e^{-\beta_n\tau}}{\beta_n^2}\left[2\beta_n + \log\left|\frac{\beta_n - 1}{\beta_n + 1}\right| + K_1(\tau - \tau\beta_n)\right] - \frac{2}{\beta_n^2}\left[\beta_n K_2(\tau) + K_1(\tau)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dans deux Notes [2] récentes nous avons rappelé la définition des fonctions $K_n(x)$ et donné les expressions des intégrales $I_{psn}(a)$ et $I_{psnm}(a, b)$ auxquelles l'expression (3) donne naissance quand on la substitue dans la définition (1) de σ, d'où la possibilité d'évaluer σ dans tous les cas.

En outre, comme σ est une forme quadratique en a_n, b_i, en exprimant que σ est minimum par des équations $\sigma'_{a_n}=0$; $\sigma'_{b_i}=0$, on obtient un système linéaire en a_n, b_i, dont la résolution fournit les valeurs les meilleures des paramètres a_n et b_i relatifs à *une forme donnée* de $B(\tau)$. Cela représente une méthode, nouvelle à notre connaissance, de la résolution de l'équation de transfert, analogue dans son esprit aux applications de la méthode variationnelle de Ritz en Mécanique quantique. Dans ce qui précède nous avons supposé implicitement que les β_n ont été choisies arbitrairement ou *empruntées aux solutions antérieures*, mais on pourrait les déterminer également par les conditions $\sigma'_{\beta_n}=0$, bien que cela conduise à un système non linéaire.

La table ci-dessous donne, à titre d'exemple, les valeurs de σ relatives aux trois solutions les plus connues, où $B(\tau)$ est de la forme $b_0+b_1\tau$, ainsi que les lois de température correspondantes, dont la troisième est particulièrement célèbre et souvent utilisée. Elle contient enfin la valeur de σ minimum, obtenue par la méthode indiquée plus haut, et la loi de température correspondante. On voit comment la décroissance de σ reflète le perfectionnement progressif des solutions, et combien la solution de Milne était, en son genre, près de la perfection.

Année.	Solution de	Loi de température.	Valeur de σ.
1906.....	Première appr. de Schwarzschild	$T^4=\frac{1}{2}T_e^4(1+2\tau)$	$+\infty$
1917.....	Approximation de Jeans	$T^4=\frac{1}{2}T_e^4\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\tau\right)$	$8,56.10^{-3}$
1921.....	Première appr. de Milne	$T^4=\frac{1}{2}T_e^4\left(1+\frac{3}{2}\tau\right)$	$0,70.10^{-3}$
1947.....	Notre solution à σ minimum	$T^4=\frac{1}{2}T_e^4\left(a+\frac{3}{2}\tau\right)$	$0,23.10^{-3}$

La valeur de a est égale à $3I_{0,0,4,3}/2I_{0,0,3,3}=1,079\ldots$

PHYSIQUE. — *Sur l'influence des conditions aux limites transversales sur la célérité des ondes explosives dans les mélanges gazeux.* Note [1] de MM. **Henri Guénoche** et **Numa Manson**, transmise par M. Gustave Ribaud.

I. Dans une Note récente [2] ont été exposés des résultats de mesures sur la variation de la célérité de détonation provoquée par une modification des parois

---

[2] Séances du 11 août et du 25 août 1947.

[1] Séance du 1er septembre 1947.

[2] H. Guénoche et P. Laffitte, *Comptes rendus*, 244, 1947, p. 1224.

du tube d'explosion. Ce phénomène, signalé par Shchelkin [3], se produit en particulier lorsqu'un fil métallique enroulé en spirale est introduit dans le tube de façon que la paroi intérieure de celui-ci soit tangente à l'hélice ainsi formée. La diminution de la célérité observée dépend de la nature et de la composition du mélange, des dimensions relatives du fil et du récipient utilisés, du pas de la spirale réalisée.

Ayant cherché à préciser si l'introduction de la spirale dans le tube n'avait pas pour conséquence la modification du mode de propagation, nous avons procédé à des mesures de la pression totale dans un tube lisse et dans le même tube muni d'une spirale. Ces mesures, sans être absolues [4], nous ont permis de constater qu'il ne s'agissait en aucun cas de déflagration. Comme la célérité de propagation, tout en étant diminuée, reste pratiquement constante, il s'agit donc vraisemblablement d'une propagation par onde explosive dont la célérité dépendrait des conditions aux limites transversales [5].

II. La théorie des ondes de choc et combustion [6] [7] s'appuyant sur l'hypothèse du mouvement par tranches des gaz brûlés, ne tient pas compte de ces conditions. Pour pouvoir interpréter le phénomène à l'aide de cette théorie, nous avons admis qu'en présence du fil hélicoïdal les gaz brûlés ont tendance à prendre un mouvement de rotation [8].

Dans ces conditions, le développement de la théorie permet de montrer que si la valeur absolue de la célérité de l'onde reste la même que dans l'hypothèse du mouvement par tranches, son orientation n'est plus nécessairement parallèle à l'axe du tube [9]. Il en résulte que la célérité observée est la valeur moyenne des projections sur l'axe de la célérité de l'onde qui reste perpendiculaire en tout point à la surface de celle-ci. Par conséquent, si D_0 est la célérité normale (tube lisse), la célérité D en présence des spires, en un point de la surface élémentaire $d\Sigma$ de l'onde, est $D = D_0 \cos\theta = D_0(ds/d\Sigma)$, où θ est l'angle que fait la normale à $d\Sigma$ avec l'axe du tube dont ds est un élément de surface. En inté-

---

(3) *Acta Physico-chimica U. R. S. S.*, 20, 1945, p. 303.

(4) Nous avons utilisé un manographe à capacité variable (Philips).

(5) L'influence de ces conditions a été déjà signalée par l'un de nous (7) dans le cas des ondes explosives « hélicoïdales ».

(6) E. Jouguet, *La Mécanique des Explosifs*, Paris, 1947.

(7) N. Manson, *Thèse*, Paris, 1946.

(8) Cette hypothèse est d'ailleurs justifiée par l'expérience, comme il a été signalé (1); on constate que les spires favorisent l'apparition de stries caractéristiques des ondes dites hélicoïdales. Ces stries, qui dans un tube lisse apparaissent sur l'enregistrement comme pratiquement horizontales, ne le sont plus en présence de spires. Elles sont nettement inclinées et leur inclinaison ne reste pas constante.

(9) Déjà dans le cas de l'onde explosive ordinaire, ce n'est pas tout à fait le cas (7) (10).

(10) W. A. Bone, R. P. Fraser et W. H. Wheeler, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London A, 235, 1936, p. 29.

grant cette expression, on obtient

$$\overline{D} = \rho D_0 = \frac{s}{\Sigma} D_0. \qquad (1)$$

3. On peut obtenir l'allure de la variation de $\overline{D}$ en précisant le mouvement de rotation des gaz brûlés. En particulier, lorsque le rapport de la grosseur du fil au diamètre intérieur du tube est suffisamment grand, il est plausible d'admettre que les gaz brûlés tendent à tourner d'un mouvement hélicoïdal dont le pas varie d'abord dans le même sens que le pas de l'hélice métallique, puis, lorsque celui-ci atteint une valeur critique, tend à croître en raison inverse pour devenir infini lorsque les spires sont jointives. Cette loi peut être représentée par l'expression

$$h = \frac{A}{2\pi n(1 - ne)} \frac{R}{r} = \frac{R^2}{\lambda r}, \qquad (2)$$

où h est le pas réduit de l'hélice d'un filet gazeux situé à la distance r de l'axe du tube et auquel l'onde est normale, n le nombre de spires par centimètre de l'hélice métallique, e le diamètre du fil, R le rayon du tube et A une constante qui ne dépend que de la nature du mélange.

A l'aide de cette relation nous avons déterminé $\rho = \overline{D}/D_0 = s/\Sigma$

$$\rho = \frac{2\lambda}{\text{Log}_e\left[\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}\right] + \lambda\sqrt{\lambda^2 + 1}}, \qquad (3)$$

et vérifié que, conformément à l'expérience, d'une part pour $n = 0 (\lambda = 0)$ et $n = 1/e$ (spires jointives) $\rho = 1$, et d'autre part pour $n = 1/2e$, ρ a une valeur minima qui dépend de A, R et e.

SPECTROSCOPIE. — *Spectre d'absorption ultraviolet de l'azote comprimé jusqu'à 1200 kg/cm².* Note [1] de MM. **Stéphane Robin**, **Boris Vodar** et **Georges Philbert**, présentée par M. Jean Cabannes.

Au cours d'une étude des spectres d'absorption des liquides comprimés, nous avons utilisé des gaz pour transmettre la pression ; nous nous sommes aperçus ainsi que l'azote commercial devient fortement absorbant au-dessous d'environ 3000 Å à des pressions dépassant quelques centaines d'atmosphères. Les résultats préliminaires relatifs à cette absorption font l'objet de la présente Note.

Dans notre appareil, le gaz commercial à une pression de 100 à 150 kg/cm² est injecté dans une des branches d'un siphon à demi rempli de mercure et dont l'autre branche communique avec une pompe à main à huile ; ce gaz peut être ainsi comprimé jusqu'à 1200 kg/cm² sans entrer en contact avec l'huile de la

---

(1) Séance du 1er septembre 1947.

pompe; il est également comprimé dans un cylindre, réuni au siphon et muni de deux fenêtres de quartz distantes de 5^{cm}.

La plupart de nos essais ont été faits avec l'azote *pur et sec* fourni par la Société *L'Air Liquide*, et renfermant moins de 1/10 000 d'oxygène et un peu d'argon suivant l'analyse faite dans les laboratoires du fournisseur ([2]). Pour réaliser des concentrations en oxygène plus fortes, nous faisions un mélange de O_2 et N_2 au sein du siphon et nous le détendions dans la cuve d'absorption.

Nos mesures mettent en évidence les résultats suivants :

1° Il existe dans N_2 comprimé une absorption continue débutant vers 3 000 Å et dont l'intensité croît régulièrement jusqu'à la limite de nos spectres (2 000 Å); en outre, quelques bandes se dessinent sur le fond continu entre 2 550 et 2 850 Å. Sous l'épaisseur de 5^{cm}, l'absorption devient importante au dessus de 500 kg/cm².

2° La croissance de cette absorption est extrêmement rapide en fonction de la pression; les coefficients d'extinction moléculaires ε sont liés à la densité ρ approximativement par la relation $\varepsilon = \text{const.} \times \rho^{3,5}$.

3° L'absorption trouvée est un effet spécifique de la pression, car à quantité de matière égale (dans une cuve de 50^{cm} et sous 120kg/cm²), le même gaz est pratiquement transparent.

4° L'absorption ne dépend pas sensiblement de la concentration en oxygène pour des concentrations en poids de O_2 comprises entre 1/10 000 et 1/100.

L'interprétation des résultats ci-dessus est pour l'instant difficile. On sait que les mesures d'absorption atmosphérique montrent que la molécule N_2 n'absorbe pas dans notre région spectrale (2) et qu'il en est de même de la molécule d'oxygène ([3]) ([4]). Toutefois, pour cette dernière, dans les états condensés, il est bien connu que les chocs créent des paires $O_2 - O_2$, ou $O_2 - N_2$, $O_2 - H_2$, $O_2 - CO_2$, etc., la densité optique variant dans ces cas, à peu près comme le carré de la concentration ([5]) ([6]). Le calcul de l'absorption due à O_2 perturbé par N_2 montre que celle-ci est négligeable dans nos conditions expérimentales, ce qui est corroboré par le résultat du 4° et par le fait que les bandes discrètes observées ne sont pas celles de O_2 comprimé. Nous avons songé aux impuretés photochimiques ou préexistantes telles que NO et NO_2, mais nous n'avons pas trouvé leurs bandes caractéristiques, et une irradiation prolongée ne change pas l'absorption. D'autre part, il existe de la vapeur de Hg dans notre gaz et l'on observe la raie 2537 Å, mais les bandes discrètes ne sont pas celles de Hg_2.

([2]) Ce degré de pureté est obtenu en traitant l'azote rectifié par l'hydroquinone et la potasse.

([3]) Mme A. Vassy, *Ann. Phys.*, **16**, 1941, 145.

([4]) L. Herman, *Ann. Phys.*, **11**, 1939, 548.

([5]) W. Finkelnburg, *Kontinuierliche Spektren*, Berlin, 1938.

([6]) W. Heilpern, *Helv. phys. Acta*, (4), **19**, 1946, p. 245.

Il n'est donc pas impossible que l'absorption observée soit due aux molécules N_2 elles-mêmes perturbées au sein du gaz comprimé. Toutefois, comme l'azote liquide, d'après Ciechomsky (7), est transparent dans l'ultraviolet, il est évident que d'autres mesures, que nous envisageons maintenant, sont nécessaires pour pouvoir conclure avec certitude.

OPTIQUE. — *Sur la vérification expérimentale de la répartition de la lumière dans les taches de diffraction et la légitimité de l'application du principe de Huyghens-Fresnel.* Note (1) de M. **André Maréchal**, présentée par M. Jean Cabannes.

Pour apprécier l'effet des aberrations géométriques sur la qualité des instruments d'optique, on peut, si ces aberrations sont faibles, déterminer l'éclairement maximum au centre de la tache de diffraction et le comparer à celui qu'on obtiendrait en l'absence d'aberrations (2). Lorsque les aberrations sont plus importantes, on peut calculer mécaniquement la répartition des éclairements dans la tache image en utilisant un intégrateur spécialement conçu et construit à cet effet (3).

Mais ces calculs sont basés sur l'application du principe de Huyghens-Fresnel dont la validité peut être mise en doute; les bords du diaphragme sont en effet le siège de phénomènes mal connus qui produisent des perturbations d'amplitude et de phase sur la surface d'onde. L'influence relative de ces phénomènes étant d'autant plus grande que la pupille est plus petite, nous nous sommes proposé d'effectuer des contrôles expérimentaux en utilisant des diaphragmes n'ayant que quelques millimètres de diamètre.

La photométrie photographique nous a permis de vérifier, avec une précision relative de quelques centièmes, la répartition des éclairements dans les taches de diffraction obtenues dans les cas suivants :

1° En l'absence d'aberrations (tache d'Airy), nous avons poursuivi les mesures jusqu'au 6e anneau clair;

2° En présence de défauts de mise au point de $\lambda/4$ et λ;

3° En présence d'un astigmatique égal à $\pm 1{,}275$, lorsqu'on met au point au voisinage de la focale ou sur *le cercle de moindre diffusion*.

Nous avons, dans chaque cas, étudié deux sections différentes du phénomène de diffraction.

Nous n'avons pu déceler ainsi aucun écart appréciable entre les résultats

---

(7) *Dissert.*, Fribourg (Suisse), 1910.

(1) Séance du 15 septembre 1947.

(2) A. Maréchal, *Comptes rendus*, 218, 1944, pp. 345-395.

(3) A. Maréchal, *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 910.

théoriques et expérimentaux, ce qui, d'une part, confirme le bon fonctionnement de l'appareil intégrateur et, d'autre part, laisse penser que l'application du principe de Huyghens-Fresnel conduit à des résultats suffisamment précis pour les besoins de la pratique, en particulier pour la détermination du pouvoir séparateur des instruments d'optique.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Hydratation des ions.*
Note de M[lle] **Marguerite Cordier**, présentée par M. Aimé Cotton.

Dans un précédent travail [1] nous avons montré comment l'étude de l'hydrolyse du molybdo-tartrate d'ammonium $[4MoO_3, 2C_4O_6H_4H]Am_4$ permet de déterminer les nombres de molécules d'eau fixées sur une molécule de ClNa.

On mesure la variation, en fonction de la concentration, du pouvoir rotatoire spécifique $[\alpha]$ du complexe seul et du complexe additionné d'une quantité déterminée de sel; la diminution de l'hydrolyse du complexe dans le second cas est attribuée à la fixation d'eau par les ions du sel. Nous avons voulu généraliser cette étude en opérant avec divers sels; une difficulté pratique tient au fait que beaucoup de sels donnent avec le complexe un abondant précipité blanc. Finalement notre choix s'est porté sur les sels anhydres suivants : Cl_2Ca, So_4Na_2 $(So_4)_3Al_2$. Pour avoir des solutions stables, il faut opérer comme il suit : dissoudre le sel anhydre dans un peu d'eau et ajouter le complexe au sel (et non l'inverse); on ne peut d'ailleurs dépasser la concentration de 12 à 15 g/l en complexe.

Nous avons toujours employé une concentration en sel de 0,05 mol/l. A partir des graphiques représentant les $[\alpha]$ en fonction des concentrations, nous avons déterminé les nombres d'hydratations du sel pour les trois mêmes taux d'hydrolyse du complexe égaux respectivement à 0,21, 0,35, 0,50. Ces nombres sont les suivants pour les quatre sels :

Taux d'hydrolyse		0,21.	0,35.	0,50.
mol. d'eau fixées par	ClNa	101	251	750
	$CaCl_2$	158	625	915
	So_4Na_2	59	79	198
	$(So_4)_3Al_2$	59	418	725

Les quatre sels présentent des ions communs et l'étude comparative des résultats permet de voir l'influence de la nature de l'ion et celle de sa valence. Si l'on compare ClNa et Cl_2Ca, on voit l'influence nette de l'ion Ca^{++} bivalent dont la présence accroît l'hydratation; de même si l'on compare So_4Na_2 et $(So_4)_3Al_2$, on voit que la substitution de l'ion trivalent Al^{+++} à l'ion monovalent Na^+ accroît d'une notable façon (sauf pour le taux d'hydrolyse le

---

[1] *Thèse*, Paris, 1944; *Journal de Chimie physique*, janvier-mars 1946.

plus faible) le nombre d'hydratations. Cependant le fait que So_4Na_2 est moins hydraté que ClNa est contradictoire avec ce qu'on sait des hydratations des ions Cl^- et So_4^{--} déduites d'autres méthodes [So_4^{--} est plus hydraté que Cl^-]; et de même l'hydratation de $(So_4)_3Al_2$ devrait théoriquement être plus grande que celle de Cl_2Ca puisque les deux ions qui composent le premier de ces deux sels sont plus hydratés que les deux ions du second. Dans ce dernier cas, une explication de l'anomalie observée peut être trouvée dans le fait que $(So_4)_3Al_2$ est partiellement hydrolysé en solution et que, par suite, les ions Al^{+++} libres sont en quantité inférieure à celle des ions Al^{+++} introduits. Une confirmation de cette hypothèse se trouve dans le fait que la solution de $(So_4)_3Al_2$ avant l'adjonction du complexe est légèrement trouble.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la distribution des poids moléculaires dans des polymères formés en solution.* Note (1) de MM. **Egbert Kunst** et **Michel Magat**, présentée par M. Gustave Ribaud.

La distribution théorique des poids moléculaires dans les polymères a été jusqu'à présent déduite uniquement à partir de considérations cinétiques basées sur divers mécanismes de formation.

Or, il existe dans certains cas une possibilité de déduire cette distribution à partir de considérations thermodynamiques dans la mesure où l'on peut supposer qu'un équilibre thermodynamique entre les différents types de molécules est atteint.

Cette hypothèse nous paraît justifiée si l'on admet avec H. S. Taylor et A. V. Tobolsky (2) que les initiateurs de polymérisation sont des vrais catalyseurs, c'est-à-dire capables de catalyser aussi bien la réaction de dépolymérisation. En effet, on connaît, grâce aux travaux de M. L. Huggins (3), P. J. Flory (4), R. L. Scott et M. Magat (5) et d'autres, l'entropie des molécules de polymères en solution en fonction de leur poids moléculaire. On connaît aussi, d'autre part, tout au moins dans certains cas, la chaleur de formation h d'une liaison. L'équilibre thermodynamique est alors défini par la condition

$$dF = \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right) dn_i = 0, \qquad (1)$$

où F est l'énergie libre et n_i le nombre de molécules dans une fraction de degré de polymérisation m_i.

(1) Séance du 15 septembre 1947.

(2) *J. Am. Chem. Soc.*, 67, 1945, p. 2063.

(3) *Ann. N. Y. Acad. Sc.*, 43, 1942, p. 1.

(4) *J. Chem. Phys.*, 10, 1942, p. 51.

(5) *J. Chem. Phys.*, 13, 1945, p. 172.

Si nous considérons une solution contenant

$$\Sigma n_i m_i = \nu \tag{2}$$

molécules de monomère, on peut écrire pour l'énergie interne

$$H = H_0 + \Sigma n_i (m_i - 1) h. \tag{3}$$

Si l'on suppose le polymère hétérogène, c'est-à-dire présentant une distribution de poids moléculaires $n_i = f(m_i)$; il s'agit de déterminer cette distribution et d'en déduire le poids moléculaire moyen en nombre. L'entropie du mélange est alors ([5])

$$\frac{S}{k} = \Sigma n_i \ln\left[\frac{\gamma(\gamma-1)^{m_i-2}}{\sigma}\right] - \Sigma n_i \ln\left(\frac{n_i}{N}\right) - N_0 \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) + \frac{\gamma}{2}\left(N - \frac{2}{\gamma}\Sigma n_i m_i\right) \ln \frac{\left(N - \frac{2}{\gamma}\Sigma n_i m_i\right)}{N} + \Sigma n_i, \tag{4}$$

où N_0 est le nombre de molécules du solvant, γ le nombre moyen de voisins d'un segment de chaîne, σ le nombre de symétrie de la chaîne et

$$N = N_0 + nm = N_0 + \gamma.$$

On détermine la distribution d'équilibre en utilisant les procédés connus du calcul des variations, et l'on trouve les deux conditions suivantes :

$$-\frac{h}{kT}\Sigma \delta n_i - \ln\left[\frac{\gamma N}{\sigma(\gamma-1)^2}\right]\Sigma \delta n_i + \Sigma \ln n_i \, \delta n_i = 0, \tag{5a}$$

$$\Sigma m_i \, \delta n_i = 0. \tag{5b}$$

On en déduit

$$-\frac{h}{kT} - \ln\left[\frac{\gamma N}{\sigma(\gamma-1)^2}\right] + \ln n_i + \alpha m_i = 0, \tag{6}$$

où α est une constante à déterminer à partir de la condition (2) en remplaçant les $\sum_i$ qui entrent dans le calcul par des $\int_0^\infty$, ce qui ne cause pas une erreur appréciable. On trouve

$$\overline{m} = \sqrt{\left(\frac{\nu}{N}\right)\left[\frac{\sigma(\gamma-1)^2}{\gamma}\right]\exp\left(-\frac{h}{kT}\right)} \tag{7}$$

et

$$n_i = \frac{\nu}{\overline{m}^2 \exp\left(-\frac{m_i}{\overline{m}}\right)}. \tag{8}$$

La formule (8) est identique à celle qui a été dérivée par P. V. Schulz ([6]) à partir de la cinétique de polymérisation en admettant que la chaîne croissante

---

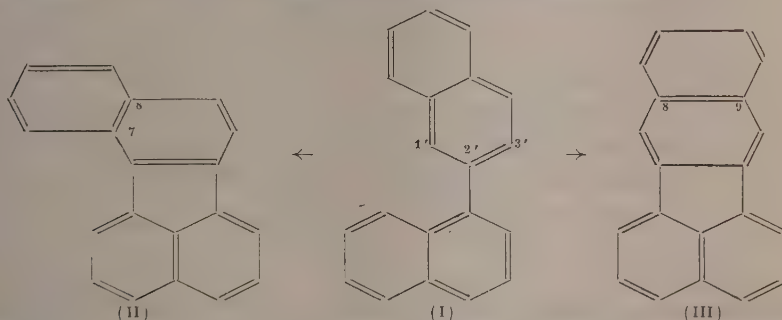
([6]) *Z. Physik. Chem.*, B. 30, 1945, p. 379.

constitue un radical libre *simple*. Cet auteur a pu aussi confirmer expérimentalement que $\overline{m} \sim \sqrt{conc}$ comme l'exige la formule (7), et d'autre part il a été établi par plusieurs auteurs que $\log \overline{m}$ est une fonction linéaire de $1/T$ [7].

Pour calculer la valeur absolue de $\overline{m}$ à l'aide de la formule (7), il faut connaître très exactement la chaleur de polymérisation, ce qui n'est généralement pas le cas. Nous avons donc effectué la vérification inverse et calculé h à partir de $\overline{m}$ pour le cas du méthacrylate de méthyle en posant $\sigma = 2$ et $\gamma = 3{,}57$ [8], et en adoptant pour $\overline{m}$ les valeurs de P. V. Schulz et E. Blaschke [9]. On trouve pour h des valeurs comprises entre — 10 et — 13 kg/cal, valeurs conformes à celle de — 11,6 kg/cal, mesurée directement par A. C. Evans et M. Polanyi [10].

CHIMIE ORGANIQUE. — *A propos des benzofluoranthènes de M. Orchin et L. Reggel.* Note [1] de MM. **Henri Moureu**, **Paul Chovin** et **Georges Rivoal**, présentée par M. Marcel Delépine.

Dans un Mémoire récent paru en mars de cette année et dont nous venons seulement d'avoir connaissance [2], M. Orchin et L. Reggel, en soumettant le 1.2'-dinaphtyle (I) à l'action d'un catalyseur chromo-alumine, obtiennent deux hydrocarbures isomères, qui ne peuvent être que les 7.8- et 8.9-benzofluoranthènes (II) et (III) formés par cyclo-déshydrogénation de (I).



Les deux hydrocarbures fondent à 217-217°,4 et 166-166°,4. L'hydrocarbure à haut point de fusion semble se former en proportion prépondérante. Considérant que le sommet 1' est plus réactif que le sommet 3', les auteurs

(7) P. V. Schulz et E. Husemann, *Z. Physik. Chem.*, B. 36, 1937, p. 184.

(8) M. L. Huggins, *Ann. N. Y. Acad. Sc.*, 43, 1942, p. 1; *id.* 44, 1945, p. 431; R. L. Scott, *Thèse*, Princeton, 1945, p. 106.

(9) *Z. Physik. Chem.*, B. 50, 1941, p. 305.

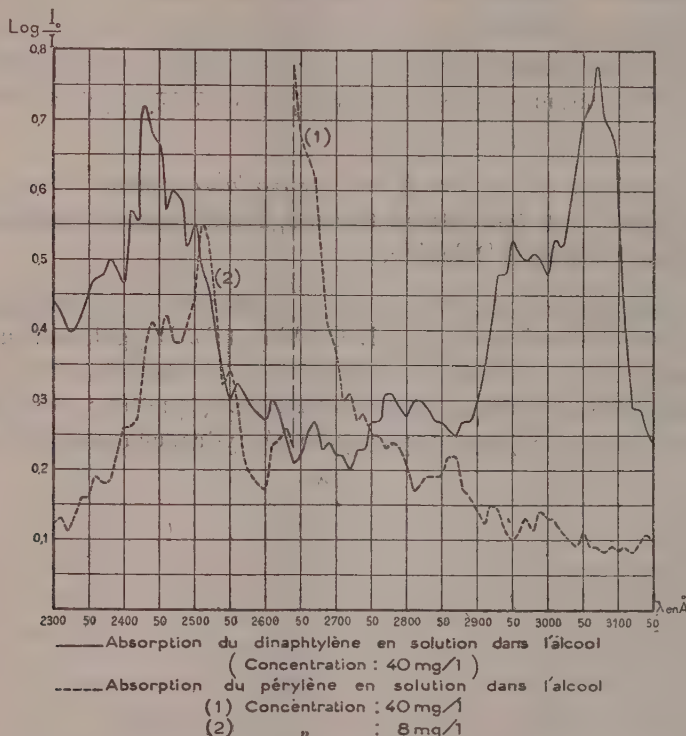
(10) *Nature*, 152, 1943, p. 738.

(1) Séance du 15 septembre 1947.

(2) *J. Am. Chem. Soc.*, 69, 1947, p. 505.

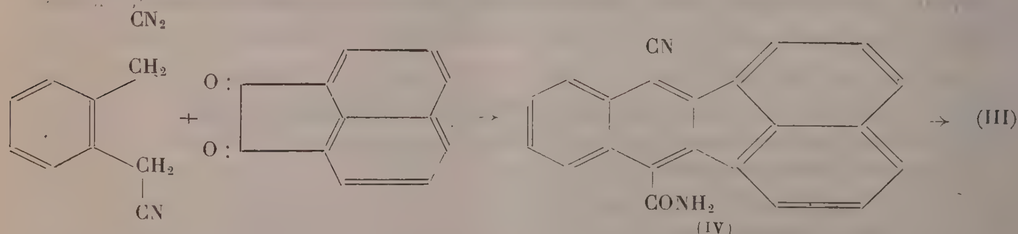
admettent, en faisant remarquer d'ailleurs qu'ils n'en apportent aucune preuve, que l'isomère à haut point de fusion doit avoir la structure (II).

Nos propres expériences nous mettent à même de préciser ce problème de structure. En effet, dans une Note datant de fin décembre 1946, parue ici même avant le mémoire américain, mais après sa rédaction, nous décrivions le 2.3.1'.8'-dinaphtylène, ou 8.9-benzofluoranthène ([3]). La méthode d'obtention ne laisse aucun doute sur sa constitution. Il résulte, en effet, de la



——— Absorption du dinaphtylène en solution dans l'alcool
(Concentration : 40 mg/l)
----- Absorption du pérylène en solution dans l'alcool
(1) Concentration : 40 mg/l
(2) » : 8 mg/l

saponification avec décarboxylation simultanée du nitrile-amide (IV) issu de la condensation de l'acénaphène quinone avec le dinitrile *o*-phénylène-diacétique.



([3]) *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 951.

Or notre dinaphtylène se montre identique à l'isomère à haut point de fusion de Orchin et Reggel. En effet, nous avons indiqué pour point de fusion 215,5-216° et, de plus, le spectre d'absorption de notre carbure présente deux maxima nets à 2950 et 3070 Å, qui coïncident avec ceux de l'isomère à haut point de fusion, tels qu'on peut les lire sur le diagramme publié par les auteurs américains. Les bandes correspondantes de l'isomère à bas point de fusion sont décalées vers les grandes longueurs d'onde et se situent vers 3070 et 3180 Å; on ne risque pas de les confondre avec les précédentes, ce qui achève l'identification sans aucune ambiguïté.

Il en résulte donc qu'il faut inverser les structures proposées par les auteurs précités et considérer que l'isomère à haut point de fusion est le 8.9-benzofluoranthène, tandis que le corps à bas point de fusion est l'isomère 7.8.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Éthers et esters formés à partir du mésodichlorure diphénylanthracénique. Stéréoisomérie des mésoéthers.* Note [1] de M. **Christian Pinazzi**, présentée par M. Marcel Delépine.

a. Le travail mentionné dans une précédente Note [2] a été continué par l'étude du mésodichlorure (I), corps dont la structure est celle d'un bischlorure de trityle. J'ai amélioré sa préparation à partir des quinols, en faisant agir à froid sur eux le chlorure d'acétyle ou le trichlorure de phosphore en léger excès et en présence de chloroforme. Le corps fond avec décomposition; sa fusion instantanée est à F 202-204° (F 183-185° d'après Bergmann) [3]. Il possède une tendance marquée à la réduction en diphénylanthracène, même pour des actions qui ne sont pas spécialement réductrices. J'ai cherché à préparer par son intermédiaire les mésoéthers (II) et (III), déjà obtenus par éthérification directe des quinols [4]; cette dernière réaction avait l'inconvénient de ne pouvoir être généralisée à tous les corps hydroxylés, par suite de l'emploi d'acide sulfurique comme catalyseur. Avec le dichlorure les possibilités semblaient plus larges. Les alcoolates alcalins essayés tout d'abord m'ont donné des mélanges de diéthers et de diphénylanthracène. Il est préférable de traiter directement par l'alcool : 1^g de dichlorure, 10^{cm^3} d'alcool anhydre, sont soumis à une agitation de 6 à 24 heures à froid. Pour certains alcools peu réactifs, il est nécessaire d'opérer à 55-60°. De toute façon l'action est lente, le dichlorure étant peu soluble dans le milieu. Le gaz chlorhydrique libéré doit être fixé, dans certains cas, par de la pyridine.

---

(1) Séance du 23 juin 1947.

(2) *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 1150.

(3) A. Haller et A. Guyot, *Bull. Soc. Chim.*, 3e série, **31**, 1904, p. 800; C. K. Ingold et F. G. Marshall, *J. Chem. Soc.*, 1926, p. 3080; E. Bergmann et C. Blum-Bergmann, *J. Am. Chem. Soc.*, 1937, p. 1439.

(4) Ch. Dufraisse et J. Le Bras, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, **4**, 1937, p. 1037.

Voici la liste des alcools avec indication de la formule brute et du point de fusion des diéthers non décrits dans la Note précédente ([2]).

Alcools à chaîne normale. — Méthanol, éthanol, propanol-1, *n*-butanol-1, *n*-pentanol-1, alcool laurique ($C_{50}H_{68}O_2$, F_{inst} 111°). Les points de fusion des diéthers sont d'autant plus bas que les chaînes sont plus longues.

Alcools à chaîne ramifiée. — Isobutanol-1 ($C_{34}H_{36}O_2$, F_{inst} 250°), isopentanol-1, ($C_{36}H_{40}O_2$, F_{inst} 231°), tétrahydrogéraniol ($C_{44}H_{56}O_2$, F_{inst} 122°).

Alcools éthyléniques. — Alcool allylique ($C_{32}H_{28}O_2$, F_{inst} 261°); cinnamol ($C_{44}H_{36}O_2$ F_{inst} 240°); furylcarbinol ($C_{36}H_{28}O_4$, F_{inst} 245° avec décomposition).

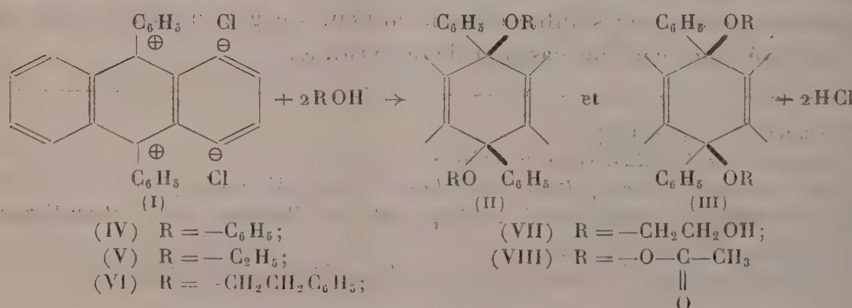
Alcools aromatiques. — Alcools benzylique, anisique, ($C_{42}H_{36}O_4$, F_{inst} 270°), phényléthylique primaire ($C_{42}H_{36}O_2$, F_{inst} 169°).

Le glycol ne donne pas de dérivé à cycle transannulaire que l'on aurait pu espérer; mais un diéther (VII) ($C_{30}H_{28}O_4$, F_{inst} 280°). La monochorhydrine et le glycol monométhylé donnent les diéthers correspondants ($C_{30}H_{26}O_2Cl_2$, F_{inst} 268° et $C_{32}H_{32}O_4$, F_{inst} 224°). Les alcools secondaires réagissent avec difficulté : Des éthers ont été obtenus avec le propanol-2, le butanol-2 ($C_{34}H_{36}O_2$, F_{inst} 204°), le cyclohexanol ($C_{38}H_{40}O_2$, F_{inst} 302°). Les alcools tertiaires, tertiobutanol, diméthyléthylcarbinol, tritanol n'ont pas donné d'éther. Le phénol donne le dérivé mésodiphénoxylé (IV).

L'ester acétique (VIII) ne se fait pas en traitant les quinols par l'anhydride acétique, le cétène ou le mélange chlorure d'acétyle-pyridine. On l'obtient par action de l'acétate d'argent sur le dichlorure : diester acétique ($C_{30}H_{24}O_4$ F_{inst} 294°). Le diester benzoïque se forme de même ($C_{40}H_{28}O_4$, F_{inst} 280°, avec décomposition).

b. J'ai cherché à obtenir les éthers stéréoisomères. Il m'avait d'abord paru logique d'envisager la préparation de ces éthers *cis* et *trans* à partir des quinols correspondants : de nombreux essais dans ce sens ont été vains. Il faut en conclure que dans l'éthérification avec les alcools, c'est l'hydroxyle du quinol qui s'élimine, comme ion négatif, avec un proton fourni par l'alcool et non pas l'inverse. Il en résulte intermédiairement une configuration plane, qui fixe l'alcoxyle indifféremment par une face ou l'autre du plan, la prédominance de l'une des configurations étant déterminée par les conditions expérimentales. En fait il se forme presque toujours un isomère prédominant, le même à partir des deux quinols et du dichlorure, sauf dans les trois cas ci-dessous, les quinols permettant alors de préparer l'un des isomères, et le dichlorure l'autre :

Éthers éthyliques (V), ($C_{30}H_{28}O_2$, F_{inst} 242° et F_{inst} 285°). Éthers phényléthyliques (VI)



(IV) $R = -C_6H_5$;
(V) $R = -C_2H_5$;
(VI) $R = -CH_2CH_2C_6H_5$;
(VII) $R = -CH_2CH_2OH$;
(VIII) $R = -O-C(=O)-CH_3$

($C_{42}H_{36}O_2$, F_{inst} 169° et F_{inst} 213 et 223°). Éthers diglycoxylés (VII), ($C_{30}H_{28}O_4$, F_{inst} 274° et F_{inst} 280°).

c. Les diéthers (II) et (III), traités par le chlorure d'acétyle ou le trichlorure de phosphore régénèrent rapidement le dichlorure, même à basse température. Ce résultat correspond à ce qui avait été observé par Gomberg (⁵) avec les éthers tritytiques. Cette propriété m'a privé du moyen d'obtenir un chlorure-éther que je comptais former par estérification de l'hydroxyle du monoéther méthylique, corps préparé par synthèse directe. Par suite, j'ai dû renoncer à préparer la série des dérivés mixtes, accessibles seulement par l'intermédiaire du monochlorure.

PHYSIQUE ATMOSPHÉRIQUE. — *Sur la formation artificielle de la pluie.* Note (¹) de MM. **Edmond Brun** et **Lucien Demon**, présentée par M. Gustave Ribaud.

1. Des expériences récentes ont montré que la pluie peut être obtenue en projetant de la neige carbonique dans les nuages d'eau surfondue (²). Nous avons analysé ce phénomène de coalescence en opérant sur des brouillards artificiels formés dans une grande cuve de $1^m,7$ de diamètre et de 3^m de hauteur.

Ces brouillards, abandonnés à eux-mêmes, ne disparaissent qu'au bout de vingt minutes. Si, dès qu'on les a formés, on projette un peu de neige carbonique au sommet de la cuve, on constate, d'abord, une opacité plus grande du brouillard (première minute), puis des scintillations qui caractérisent l'existence de cristaux de glace (deuxième et troisième minutes). A partir de la quatrième minute, l'atmosphère s'éclaircit, tandis que tombent des flocons de neige; à la cinquième minute, le brouillard a disparu.

On peut penser que les gouttelettes d'eau surfondue touchées par les particules de neige carbonique se solidifient, ce qui occasionne, dès l'abord, une opacité plus grande du brouillard. Les cristaux se développent ensuite au fur et à mesure qu'ils entrent en contact avec d'autres gouttes en surfusion, puis ils se groupent de plus en plus facilement en flocons et le balayage de la cuve se produit alors rapidement.

Moins d'un dixième de centimètre cube de neige carbonique suffit à provoquer la disparition des six mètres cubes de brouillard que contient la cuve et, d'après l'explication donnée plus haut, on peut prévoir qu'il ne faudrait pas une

---

(⁵) M. Gomberg et G.-T. Davis, *Ber. d. Chem. Gess,*, **36**, 1903, p. 3324.

(¹) Séance du 15 septembre 1947.

(²) E. B. Kraus et P. Squires, *Nature,* 12 avril 1947, p. 489.

quantité plus grande de neige carbonique pour dissiper une colonne de brouillard plus élevée, le temps de dissipation ne devant pas augmenter notablement quand la hauteur s'accroît.

La rapidité d'évolution est d'autant plus grande que la température, toujours inférieure à zéro degré, est plus basse (expériences effectuées entre 0° C. et — 10° C.). L'échec de certaines tentatives récentes effectuées sur des nuages naturels est dû probablement à la température trop élevée des nuages.

2. Ces résultats étayent la théorie de la pluie de Findeisen. D'après cet auteur, en général, les précipitations se forment d'abord sous forme de neige, et c'est en traversant l'isotherme zéro que les flocons de neige donnent les gouttes d'eau de pluie, celles-ci ne se formant pas, en général, par coalescence directe des gouttelettes de brouillard.

3. Il est probable qu'en absence d'orage, la pluie se produit habituellement suivant le processus décrit par Findeisen. Cependant, en traversant un nuage à température positive, au cours d'une ascension rapide en téléphérique, nous avons pu constater, qu'il pleuvait sous le nuage; qu'à la base du nuage, les gouttelettes étaient plus fines et, qu'au-dessus du nuage, il n'y avait plus de précipitation.

Il reste donc possible de provoquer la coalescence d'un brouillard à température positive, puisqu'une telle coalescence se produit dans la nature.

BIOLOGIE. — *Des biocénoses des Palmiers.*

Note de M. **Pierre Lepesme**, présentée par M. Auguste Chevalier.

Traiter des biocénoses offertes par une famille végétale qui ne comprend pas moins de 236 genres et près de 3 000 espèces, apparaît, même si l'on se limite au peuplement entomologique, comme une entreprise hasardeuse et pleine de prétention. Seule, la très grande homogénéité des milieux offerts par les Palmiers nous a permis de la réaliser [1], car il est permis d'affirmer que ces Monocotylédones constituent une unité biocénotique remarquable, rarement observée dans d'autres groupes végétaux. Le stipe, la couronne, les palmes et les *cuvettes axillaires* formées par les bases des rachis créent, en particulier, autant de microclimats qui attirent des éléments parallèles, sinon semblables, sur les Palmiers hygrophiles de la forêt dense tropicale et sur les Palmiers xérophiles des déserts. En dehors des Insectes dont la présence sur ces essences est essentiellement liée au facteur trophique, à la constitution biochimique de

(1) *Les Insectes des Palmiers*, par P. Lepesme, avec le concours de J. Ghesquière et la collaboration de J. Bourgogne, E. Cairaschi, R. Paulian et A. Villiers, 1 vol. cart., 904 p., 638 fig., Paris, 1947.

la plante (*hôtes primordiaux*), il est en effet des formes dont les liens avec la plante sont surtout ou purement de nature physique (*hôtes secondaires*); pour les uns, à régime généralement saproxylophage (Dynastines, Calandrines, Cossonines), le facteur trophique et les facteurs microclimatiques agissent corrélativement sans qu'il soit possible de les dissocier; les autres, à régime très variable, sont presque tous des hygrophiles pour lesquels les caractères physiques du micromilieu comptent seuls. Il est particulièrement remarquable de trouver parmi ces derniers non seulement des palmicoles stricts, mais même des formes inféodées à un genre de Palmier, presque tous semi-aquatiques d'ailleurs.

D'une façon générale, l'inféodation des Insectes aux Palmiers est en effet plus ou moins lâche, et l'on peut distinguer :

1° des espèces *exclusivement palmicoles*, comprenant des hôtes primordiaux et des hôtes secondaires et dont certaines (*monogénobies*) sont même inféodées à un genre de Palmiers, alors que d'autres vivent sur plusieurs genres (*polygénobies*);

2° des espèces *facultativement palmicoles* qui, tout en étant des hôtes très réguliers des Palmiers, se retrouvent sur d'autres essences généralement monocotylées : Graminées, Musacées, Zingibéracées, etc., mais aussi dicotylées;

3° des espèces *accidentellement palmicoles*, capturées par les Palmiers à la limite ou en dehors de leur aire de dispersion normale, cas de la plupart des formes observées sur les Palmiers de serre, cas aussi de beaucoup de plantations créées de toute pièce par l'homme.

L'homme a modifié considérablement l'aire de dispersion de certains Palmiers (Cocotier, Palmier à huile, Dattier) et secondairement leur biocénose; l'origine de quelques-uns est même très discutée. L'analyse de leur biocénose entomologique nous fournit des renseignements intéressants à ce sujet. Ainsi l'*Elaeis guineensis* Jacq. héberge en Afrique des formes à la fois très spécialisées et très localisées (*Prosoestus*, *Platygenia*, *Pimelephila*); si l'on ajoute que 23 % des espèces connues sur ce Palmier dans le massif sylvestre ouest-africain lui sont strictement inféodées, alors que le même pourcentage est négligeable en Amérique du Sud, aucun doute n'est possible quant à l'origine africaine de ce Palmier.

Pour le Cocotier, les faits sont moins nets. Le pourcentage de spécifiques est de 47 % en Mélanésie, 20 % en Amérique et 3,6 % en Afrique, chiffres tout en faveur d'une origine mélanésienne des *Cocos*, mais la moindre importance des phénomènes de capture en Mélanésie où le Cocotier constitue l'essentiel de la flore arborée et où il n'existe pas, comme en zone néotropicale, d'espèces affines de Palmiers, pourrait expliquer en partie la faiblesse du pourcentage américain. On peut s'étonner de n'observer que 23 % de spécifiques sur les *Elaeis* africains, alors que les *Phoenicophorium* des Seychelles révèlent 64 % de

spécifiques (et 86 % d'exclusivement palmicoles); l'endémisme insulaire général des Seychelles suffirait à lui seul à expliquer de tels chiffres.

Au total, la biocénose entomologique des Palmiers comporte deux éléments bien distincts : un élément très ancien inféodé aux Palmiers, dont l'inféodation a précédé la fragmentation systématique et qui a évolué ensuite parallèlement à la plante, donnant naissance à des formes spécifiques ultra-spécialisées telles que les *Prosoestus*, et un élément parfois aussi ancien et alors à très vaste dispersion ou plus récent et plus localisé, lié aux phénomènes de capture et pour lequel la dispersion actuelle des Palmiers intervient plus que la dispersion dans le passé; si ce dernier élément n'offre guère d'intérêt biogéographique, son importance économique est en revanche considérable, non seulement pour les Palmiers, mais pour les autres essences, Monocotylédones surtout, qui peuvent le capturer à leur tour.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur les pigments biliaires des coquilles de Mollusques du genre* Turbo. Note de M. **René Tixier**, présentée par M. Maurice Javillier.

C. F. Krukenberg (1) signalait, en 1883, la présence de pigments biliaires dans les coquilles de Mollusques des genres *Haliotis*, *Turbo* et *Trochus*. Les résultats de cet auteur étaient confirmés plus tard par F.-N. Schulz (2). Depuis, des recherches ont été entreprises sur les substances rouge ou bleu vert de diverses espèces d'*Haliotis*, afin de montrer la parenté de ces biochromes avec les pigments biliaires (3), (4), (5), (6). Aucun de ces pigments n'avait cependant été obtenu à l'état cristallisé et, si leur parenté avec les bilirubinoïdes semblait probable, leur constitution chimique exacte était inconnue.

Ayant pu nous procurer quelques coquilles de diverses espèces de *Turbo*, nous avons employé, pour extraire et purifier les pigments, la technique déjà utilisée pour les biochromes tétrapyrroliques (7).

30 coquilles (environ 5^{kg}) de *Turbo regenfussi* sont traitées par 8^{l} d'alcool méthylique chlorhydrique à 13 %. La solution verte est traitée par fractions de 2^{l}; chaque fraction étant additionnée de 500^{cm^3} de chloroforme, puis d'eau distillée jusqu'à formation d'un trouble blanchâtre. Au cours de la neutralisation à l'aide de bicarbonate de sodium, le

(1) *Centralbl. d. Med. Wissensch.*, 44, 1883, p. 785.
(2) *Zeitschr. f. allg. Physiol.*, 3, 1904, p. 91.
(3) T. Kodzuka, *The Tohuku Journ. of experimental medicine*, 2, 1921, p. 287.
(4) Ch. Dhere et C. Baumeler, *Arch. int. Physiol.*, 32, 1930, p. 55.
(5) F.-N. Schulz et M. Becker, *Biochem. Zeitschr.*, 236, 1931, p. 99.
(6) R. Lemberg, *Zeitschr. f. Physiol. Chemie*, 200, 1931, p. 173.
(7) R. Tixier, *Ann. Inst. Océan.*, 22, 1945, p. 343.

chloroforme se sépare en entraînant les pigments. La couche chloroformique est lavée avec du bicarbonate de sodium à 5 % qui décompose les chlorhydrates formés en milieu acide sans enlever les pigments biliaires estérifiés. Finalement les solutions chloroformiques réunies sont déshydratées par le sulfate de sodium anhydre.

Après filtration, la solution chloroformique est évaporée à sec et le résidu repris par un mélange à volumes égaux de chloroforme et d'éther. La solution éthéro-chloroformique est filtrée sur une colonne d'alumine qui fixe les pigments bleu vert dans sa portion supérieure. Le chromatogramme est ensuite développé à l'aide de chloroforme. Une première zone bleu pâle se détache, suivie d'une zone principale bleu foncé. Lorsque la zone bleue principale atteint le bas de la colonne d'alumine, nous recueillons la solution bleue qui filtre. Par évaporation de cette solution, le pigment cristallise sous forme de prismes bleu foncé réunis en houppes. Ce pigment est rechromatographié sur alumine, puis recristallisé dans un mélange de chloroforme et d'acétate d'éthyle.

Nous obtenons ainsi 20^{mg} de pigment à l'état d'ester méthylique. Ce pigment, que nous nommons *turboglaucobiline*, est très soluble dans le chloroforme, moins soluble dans l'acétate d'éthyle et l'alcool méthylique, très peu soluble dans l'éther, insoluble dans l'éther de pétrole. Son point de fusion (au bloc Maquenne) est 205°-206°. L'analyse élémentaire s'accorderait avec la formule $C_{37}H_{46}O_{12}N_4$; calculé : C % 60,19; H % 6,27; N % 7,58; trouvé : C % 59,12 et 59,13; H % 6, 19 et 6,26; N % 7,52. Cette formule est voisine de celle de l'ester méthylique de la coproglaucobiline $C_{39}H_{46}O_{10}N_4$, dont les teneurs en éléments sont : C % 64,08; H % 6,35; N % 7,67; OCH_3 % 16,99. La teneur en OCH_3 de la turboglaucobiline serait de 18,8 %.

Le spectre d'absorption de la solution chloroformique présente, dans l'ultraviolet, deux bandes, l'une principale située à λ 378 mμ, l'autre à λ 307 mμ. La position du maximum de la bande principale est intermédiaire entre les positions des maxima des bandes principales des esters méthyliques de la biliverdine (λ 384 mμ), et de la glaucobiline (λ 363 mμ). Par ailleurs, les deux bandes d'absorption secondaires très faibles de la biliverdine et de la glaucobiline sont remplacées par une seule bande très nette. L'allure de la courbe d'absorption dans le spectre visible est comparable à celle des esters méthyliques de la biliverdine et de la glaucobiline; cependant le maximum d'absorption situé à λ 655 mμ est intermédiaire entre celui de la biliverdine λ 665 mμ et de la glaucobiline λ 640 mμ. Le spectre d'absorption du sel complexe de zinc oxydé par l'iode de la turboglaucobiline présente deux maxima, l'un principal à λ 635 mμ, l'autre secondaire à λ 585 mμ. Le maximum principal de la biliverdine se situe dans ces conditions à λ 640 mμ et celui de la glaucobiline à λ 627 mμ.

La turboglaucobiline présente toutes les propriétés des bilirubinoïdes possédant, comme la biliverdine, une constitution fondamentale bilitriène (couleurs et spectres des solutions, test de Gmelin et réaction iodo-zincique). Ce pigment a été également isolé par chromatographie des coquilles de *Turbo marmoratus* et *T. elegans*.

C'est la première fois qu'un pigment biliaire ne dérivant pas de la protoporphyrine, mais possédant une constitution chimique voisine de celle de la coproglaucobiline, a pu être isolé d'un organisme animal.

MICROBIOLOGIE. — *Sur les propriétés antibiotiques de* Tuber melanosporum *Vitt.* Note (¹) de M. **Jean Jacquet**, présentée par M. Auguste Chevalier.

Dans une Note récente, J. Chaze (²) a montré que les cultures du mycélium truffier, obtenues suivant un procédé décrit par lui-même et Mastas (³), étaient capables de faire cesser la prolifération, puis de faire reculer la densité optique jusqu'à clarification totale de cultures bactériennes, faites en milieu liquide à partir de très fins fragments de terre truffière. L'antibiose n'est pas parfaite puisque l'âge n'est pas indifférent : il faut des souches de 10 à 20 jours; plus tôt, ce sont les microbes qui détruisent le mycélium. Enfin, la liste des germes du sol, sensibles à l'action bactéricide du champignon, n'a pas été publiée. Il m'a paru intéressant de superposer à l'action ainsi démontrée d'un mycélium végétatif de culture, celle que pouvait avoir le tubercule lui-même tel qu'il se présente dans la nature (⁴).

J'ai utilisé la technique de Fleming (⁵), soit en appliquant, sur les cultures de germes étudiés, des broyats préparés à froid dans l'eau physiologique de tubercules très récemment récoltés, soit en coulant perpendiculairement aux stries d'ensemencement, dans une rigole d'où la gélose nutritive ordinaire avait été enlevée, de la gélose à l'extrait de truffe.

Je n'ai observé aucune trace d'antibiose vis-à-vis des germes pathogènes ci-dessous dont la croissance n'est nullement entravée : b. tuberculeux (variété humaine, bovine, aviaire); b. diphtérique, staphylocoque pyogène et streptocoque hémolytique d'origine humaine, streptocoque de la mammite des bovidés, entérocoque; b. pyocyanique, colibacilles d'origines humaines et animales variées; b. d'Eberth et paratyphique A d'origine humaine, paratyphiques B d'origines humaines et animales diverses; b. de Gaertner; b. d'Ærtrycke, *Pasteurella suis*; b. de Bang, *Proteus vulgaris*, *Pr. O X* 19. Bien plus, tous les extraits ou tous les fragments de truffe ont donné naissance aux points où ils avaient touché le milieu, à des colonies de champignons

(¹) Séance du 15 septembre 1947.

(²) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 491.

(³) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 2099.

(⁴) Les essais ont été commencés en décembre 1946, au Laboratoire des Etablissements Vialars à Villefranche-de-Rouergue et continués au Laboratoire de Bactériologie du Calvados à Caen.

(⁵) *Lancet*, **242**, 1942, p. 732.

(*Penicillium glaucum*, *Aspergillus glaucus*, *Mucor mucedo*) ou de bactéries diverses des types *Micrococcus luteus*, *Sarcina lutea*, *Flavobacterium diffusum*, *Pseudomonas putida*, *P. striata*, *Achromobacter formosum*, etc. Par conséquent, non seulement les tubercules de truffe, à leur époque de maturité (fin décembre), ne présentent pas d'antagonismes contre les germes morbides énumérés, mais encore, ils sont eux-mêmes envahis par des moisissures ou des bactéries banales provenant du sol. En revanche, écrasés dans l'eau physiologique, ils inhibent parfaitement la germination en boîtes de Pétri des caryopses de blé, d'avoine, d'orge.

Les extraits filtrés sur bougie Chamberland L_3 présentent cette même propriété. Les uns et les autres n'empêchent pas l'apparition des moisissures (*Mucor mucedo* notamment) qui attaquent plus ou moins vite les graines. L'eau de lavage des tubercules intacts et de la terre qui les environne rend, elle aussi, impossible la germination des graminées. Mais, il est beaucoup plus difficile de montrer que le filtrat sur bougie de l'eau qui a lavé le sol truffier est doué du même pouvoir : l'antibiose est alors très atténuée. Il est possible que la substance soluble qui diffuserait hors du champignon pour agir à distance, reste adsorbée sur les particules de terre et ne soit plus filtrable, comme le principe antibiotique du colibacille isolé de l'eau de mer par C. Zo Bell ([6]) et qui reste fixé sur les bougies de porcelaine, le charbon, la terre de diatomées, la bentonite. Quoi qu'il en soit, la truffe, dans ces essais, n'agit que par inhibition sans destruction : tous les caryopses restés non germés, même pendant deux mois, pourvu qu'ils n'aient pas été détruits par les moisissures ou les bactéries de la putréfaction, poussent ensuite, lorsqu'ils sont soustraits à l'imprégnation par les extraits, puis lavés et remis en milieu humide. Cette particularité rappelle singulièrement l'effet de l'eau de mer sur les caryopses de certains halophytes tel que je l'ai établi sur *Spartina Townsendi* ([7]).

En conclusion, le passage dans la terre d'une *tubérine* expliquerait la dénudation totale du sol si étendue et si caractéristique des truffières. Elle semble spécifique de l'espèce *T. melanosporum* puisque l'on peut récolter tout à côté d'autres tubéracées telles que *T. bituminatum* Bk. et Br., en des zones où l'herbe pousse parfaitement. En outre, il y a lieu de dissocier l'activité antibiotique si puissante de la truffe comestible sur les végétaux supérieurs herbacés ou sous-frutescents, qui disparaissent spontanément sur le terrain, de l'action sur les microorganismes, limitée à certaines espèces seulement. En tout cas, le manque d'activité des tubercules mûrs sur les germes de

---

([6]) *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.*, 34, 1636, p. 113.

([7]) *Spartina Townsendi* H. et J. Groves; 1881; *Anatomie, Répartition géographique, Écologie* (Thèse Dr ès Sciences, Paris, 1947, et *Recherches écologiques sur le littoral de la Manche*, 1 vol., Paris (en cours d'impression).

maladies laisse quelque doute quant aux possibilités d'utilisation thérapeutique. Enfin, l'assimilation de la dénudation du sol dans la nature autour du champignon à la valeur antibiotique sur les microbes pathogènes, qui a conduit A. Hollande [8] à la découverte de la clitocybine, ne semble pas une règle absolue en mycologie.

La séance est levée à 15h50m.

A. Lx.

ERRATA.

—

(Séance du 30 juin 1947.)

Note de Mlles *Éliane Le Breton* et *Yvonne Moulé*, Recherches sur la constitution et la toxicité de la ricine pure :

Page 152, 17e ligne, *au lieu de* 12g,7, *lire* 8g,6.

---

[8] *Comptes rendus*, **221**, 1945, p. 361.